CHƯƠNG III: ĐỘNG LỰC HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM
ĐỘNG LỰC HỌC HỆ VẬT RẮT
DẠNG 1: BÀO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

1.1. Kiến thức cơ bản

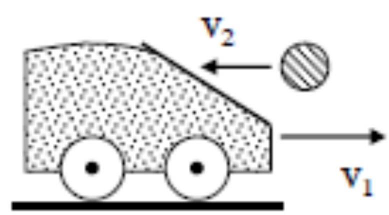
- Dạng toán này chủ yếu liên quan tới việc ứng dụng định luật bảo toàn động lượng để giải. Đặc điểm nhận dạng là thường là mô típ lãng mạn kiểu Hàn Xẻng tức là anh và chị lao vào nhau với một vận tốc nào đó, rồi tính vận tốc của mỗi người sau khi va chạm. Một kiểu nữa cũng thường hay áp dụng là trong các bài toán phản lực ví dụ tên lửa phụt khí, hay súng bắn đạn gì gì đó. Thường là bài sẽ hỏi vận tốc của các thành phần trong hệ. Nói chung dạng này dễ, cứ áp dụng công thức mà táng tận tình là ra.

- Yêu cầu: phải nhớ các công thức liên quan tới động lượng:

- Động lượng: $\vec{p} = m\vec{v}$
- Bảo toàn động lượng: $\sum \overrightarrow{p_{trước}} = \sum \overrightarrow{p_{sau}}$

1.2. Bài tập ví dụ: 3.(2, 4, 5, 6)

Bài 3-4: Một xe chở đầy cát chuyển động không ma sát với vận tốc v_1 = 1 m/s trên mặt đường nằm ngang. Toàn bộ xe cát có khối lượng M = 10 kg. Một quả cầu khối lượng m = 2 kg bay theo chiều ngược lại với vận tốc nằm ngang v_2 = 7 m/s. Sau khi gặp xe, quả cầu nằm ngập trong cát. Hỏi sau đó xe chuyển động theo chiều nào, với vận tốc bằng bao nhiêu?



**** Nhận xét:*** Đầy đủ đặc điểm của dạng bài toán động lượng rồi, có va chạm, có hỏi về vận tốc. Do là bài đầu nên chúng ta sẽ giải một cách chi tiết từng bước. Khi làm bài thi thì không nhất thiết phải trình bày quá chi tiết như trong bài giải mẫu đâu đấy. Hệ của chúng ta gồm 2 đối tượng là xe kít và quả cầu, hai đối tượng này đang lao vào nhau với tốc độ chóng mặt. Tuy nhiên đối tượng quả cầu sau khi lao vào xe kít do YSL nên không thoát được và bị dính chặt trong xe kít. Bài toán hỏi sau đó xe chuyển động theo chiều nào → cái này thì ban đầu cứ giả sử theo một chiều nào đó rồi giải ra, nếu dương thì mình giả sử chuẩn cmnr. Nếu âm thì chém là xe chuyển động theo chiều ngược lại là xong.

* Giải:

- Động lượng của hệ trước va chạm là:

$$\sum \overrightarrow{p_{trước}} = \overrightarrow{p_{xe}} + \overrightarrow{p_{cầu}} = M.\overrightarrow{v_1} + m\overrightarrow{v_2}$$

- Động lượng của hệ sau khi va chạm: chú ý là sau khi va chạm do quả cầu gắn chặt với xe nên vận tốc của nó và xe sau va chạm là cũng một hướng cùng độ lớn $\vec{v}$. Ta có:

$$\sum \overrightarrow{p_{sau}} = \overrightarrow{p'_{xe}} + \overrightarrow{p'_{cầu}} = M.\vec{v} + m.\vec{v} = (M+m)\vec{v}$$

- Theo định luật bảo toàn động lượng ta có:

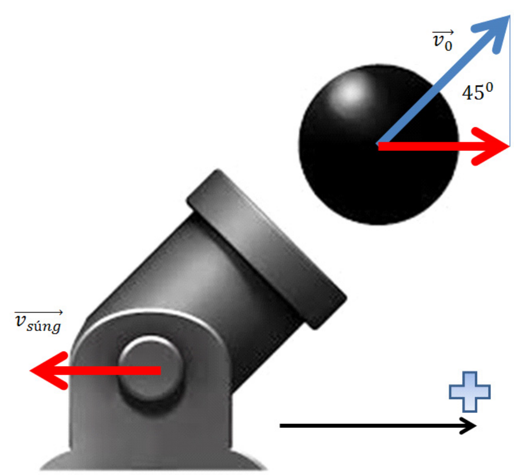
$$\sum \overrightarrow{p_{trước}} = \sum \overrightarrow{p_{sau}} \leftrightarrow M.\overrightarrow{v_1} + m\overrightarrow{v_2} = (M+m)\vec{v}$$

- Hai vế đều là vector, muốn tìm độ lớn của vận tốc thì phải chọn chiều dương và chiếu lên trục đó là xong. Giả sử chiều dương hướng từ trái qua phải và sau khi va chạm xe và quả cầu chuyển động theo chiều từ trái qua phải. Ta có:

$$Mv_1 - mv_2 = (M+m)v \rightarrow v = \frac{Mv_1 - mv_2}{M+m} = \frac{10 \times 1 - 2 \times 7}{10+2} = -0.33\ m/s$$

- Sặc, vê ra âm mới đau, như vậy chúng ta đã giải sử sai cmnr. Sai thì sửa thôi, sau khi va chạm thì xe chuyển động ngược lại là xong ☺

Bài 3-5: Một khẩu đại bác không có bộ phận chống giật, nhả đạn dưới một góc a = 45^0 so với mặt phẳng nằm ngang. Viên đạn có khối lượng m = 10 kg và có vận tốc ban đầu v_0 = 200 m/s. Đại bác có khối lượng M = 500 kg. Hỏi vận tốc giật của súng nếu bỏ qua ma sát.



**** Nhận xét:*** Nếu bạn hay xem phim hành động Mẽo thì thỉnh thoảng thấy một vài chú thông minh vác shotgun lên sát mũi bóp cò và ăn chọn cả cái báng súng vào mõm ngay sau khi bóp cò → lí do mà phải học vật lý để tránh rơi vào tình huống đã ngu lại còn tỏ ra nguy hiểm. Bài toán này cũng tương tự như tình huống trên. Khi đại bác bắn đạn thì kiểu gì nó cũng bị giật lại. Một điều chú ý là động lượng theo từng phương được bảo toàn. Ở bài này viên đạn bắn theo góc nghiêng, và người ta chỉ hỏi vận tốc giật của súng, tức là vận tốc theo phương ngang. Do đó ta sẽ áp dụng định luật bảo tòan theo phương ngang.

- Động lượng của hệ trước va chạm là: (chú ý trước khi bắn hệ đứng yên nên động lượng bằng 0)

$$\sum \overrightarrow{p_{trước}} = \overrightarrow{p_{súng}} + \overrightarrow{p_{đạn}} = \vec{0}$$

- Động lượng của hệ sau va chạm là:

$$\sum \overrightarrow{p_{sau}} = \overrightarrow{p'_{súng}} + \overrightarrow{p'_{đạn}} = M\overrightarrow{v_{súng}} + m\overrightarrow{v_0}$$

- Chiếu lên phương ngang với chiều dương từ trái qua phải:

$$-M.v_{súng} + mv_0cos45^0 = 0 \rightarrow v_{súng} = \frac{mv_0cos45^0}{M} = \frac{10 \times 200}{500} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v_{súng} = 2.83\ m/s}$$

DẠNG 2: BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

2.1. Kiến thức cơ bản

- Dạng toán này liên quan tới mômen như vậy trong đầu phải nghĩ ngay tới cái gì đó quay quay như quay tay chẳng hạn. Và tất nhiên để làm được các bài toán dạng này thì cũng cần phải nạp một ít kiến thức về động lượng vào đầu cái đã. Không biết tí gì là chịu cmnl.
- Thực ra cách nhớ đơn giản nhất chính là tìm mối liên quan giữa chuyển động thẳng và chuyển động quay. Chỉ cần nhớ các phương trình trong chuyển động thẳng và cách qui đổi là lập tức chúng ta có phương trình trong chuyển động quay tương đương luôn.

Chuyển động thẳng		Chuyển động quay
- Khối lượng m	↔	- Mômen quán tính I
- Gia tốc a	↔	- Gia tốc góc β
- Ngoại lực F	↔	- Mômen ngoại lực M
- Vận tốc v	↔	- Vận tốc góc ω
- Động lượng p	↔	- Mômen động lượng L
- Quãng đường s	↔	- Góc quay φ

- Như vậy với bảng qui đổi tương đương trên ta hoàn toàn có thể biến đổi các phương trình ứng với chuyển động quay từ các phương trình trong chuyển động thẳng. Ví dụ

- Định luật II Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{M} = I\vec{\beta}$$

- Bảo tòan động lượng:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} \rightarrow \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} = \overrightarrow{L'_1} + \overrightarrow{L'_2}$$

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2} \rightarrow I_1\overrightarrow{\omega_1} + I_2\overrightarrow{\omega_2} = I_1\overrightarrow{\omega'_1} + I_2\overrightarrow{\omega'_2}$$

- Định lý về động lượng:

$$\sum F_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \sum M_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Phương trình động học:
  - $v = v_0 + a.t \rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t$
  - $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
  - $v^2 - v_0^2 = 2as \rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\varphi$

- Ngoài ra, cần thuộc thêm công thức tính mômen động lượng

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- Tiếp theo là một series quan trọng về mômen quán tính, chúng ta cần thuộc các công thức sau. Còn làm thế nào để thuộc thì chỉ có làm bài tập và mỗi ngày giở ra kiểm tra các công thức một vài lần là nhớ như in ngay.

- Của vật rắn đối với trục quay:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i = \int_{vật} r^2 dm$$

r là khoảng cách từ các phần tử tới trục quay, *dm* không phải là "định mệnh" đâu đấy, *dm* là một khối lượng của một phần tử hay nói theo ngôn ngữ toán học thì nó là vi phân khối lượng. Để ý là có kí hiệu tổng xích ma và tích phân → rất nhiều bạn cũng chả phân biệt được khi nào thì dùng cái nào. Vật rắn có kết cấu rời rạc thì dùng tổng xích mà, còn kết cấu thành khối liên tục thì dùng tích phân mà táng. Ví dụ thế này giả sử tôi có một vật rắn có hình dạng tam giác với ba viên bi cố định ở 3 đỉnh, các viên bi được liên kết với nhau bởi một thanh có khối lượng không đáng kể. Khi đó nếu tính mômen quán tính của hình tam giác đó với trục quay qua trọng tâm của tam giác đó thì ta chỉ cần tính mômen quán tính của từng đỉnh với trục đấy rồi cộng lại là xong. Nếu ta thay tam giác bằng một đĩa tròn đặc chẳng hạn và xác định mômen quán tính với trục quay đi qua tâm đĩa thì 99.99% là phải sử dụng kiến thức tích phân để mà tính rồi.

- Của chất điểm có khối lượng m với trục quay
$$I = mr^2$$
- Của thanh dài khối lượng m, chiều dài l, đối với trục vuông góc và đi qua tâm của thanh.
$$I = \frac{ml^2}{12}$$
- Của đĩa tròn hoặc trụ đặc đồng chất (nhớ là chỉ chơi trụ đồng chất, không tính đến trụ xăng pha nhớt, hifi đâu đấy) có khối lượng m và bán kính R:
$$I = \frac{mR^2}{2}$$
- Của vành hoặc trụ rỗng đồng chất khối lượng m, bán kính R:
$$I = mR^2$$
- Của khối cầu đặc đồng chất

2.1. Bài tập ví dụ

Bài 3-10: Một trụ rỗng có khối lượng 50kg, đường kính 1m, đang quay với vận tốc 800 vòng/phút. Tác dụng vào trụ một lực hãm tiếp tuyến với mặt trụ và vuông góc với trục quay. Sau 2 phút 37 giây, trụ dừng lại. Tìm:
a) Mômen hãm; b) Lực hãm tiếp tuyến.

**** Nhận xét:*** Bài toán có liên quan đến lực và mômen hãm như vậy có liên quan tới kiến thức động lực học rồi. Tiếp theo lại có mấy anh vận tốc, thời gian thì có lẽ nào đây cũng liên quan tới kiến thức động học. Như vậy, trong đầu phải nghĩ ngay kiểu gì cũng sẽ phải kết hợp giữa động học và động lực học rồi. Cầu nối quan trọng nhất giữa kiến thức động học và động lực học chính là gia tốc dài a hoặc gia tốc góc β trong chuyển động quay. Đề bài còn cho biết đối tượng là trụ rỗng → 99% là dùng để tính mômen quán tính cnmr.

**** Giải:***

- Để ý mômen hãm liên hệ với mômen quán tính qua biểu thức (về cơ bản chính là định luật 2 Newton thôi)

$$M = I\beta$$

- Như vậy tìm được thằng I và thằng β là xong cmnl. Thằng I thì có sẵn công thức tính cho trụ rỗng rồi nên sẽ đề cập sau. Giờ xử lý thằng β trước. Theo phương trình động học cho chuyển động quay ta có:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \beta.\boldsymbol{t}$$

- Để ý là ba thằng màu đỏ thì đều đã biết rồi nhóe. Một điều cần chú ý là nhớ đổi ra đơn vị cơ bản là rad/s và s thôi. Nếu thay β vào phương trình tính mômen hãm ta có:

$$\boldsymbol{M = \frac{I\omega - I\omega_0}{t}}$$

- Trụ rỗng thì ở trên đã nói rồi: $I = mR^2$ → đến đây chỉ thay số vào mà phang tận tình là ra:

$$M = \frac{mR^2\omega - mR^2\omega_0}{t} = -\frac{mR^2\omega_0}{t} = \frac{50 \times 0.5^2 \times 800 \times \frac{2\pi}{60}}{120 + 37} = -6.67\ N.m$$

- Câu b của bài toán yêu cầu tính toán lực tiếp tuyến. Cái này thì phải để ý mối quan hệ giữa mômen và lực gây ra mômen đó. Công thức này thực ra dùng rất nhiều. Nếu ta nhân lực với khoảng cách từ tâm quay tới phương của lực thì nó sẽ ra mômen thôi.

$$\boldsymbol{M = F.R \to F = \frac{M}{R} = -\frac{mR\omega_0}{t} = -13.34\ N}$$

Bài 3-11: Một thanh đồng chất chiều dài l = 0,50m có thể quay tự do xung quanh một trục nằm ngang đi qua một đầu của thanh. Một viên đạn khối lượng m = 0,01 kg bay theo phương nằm ngang với vận tốc v = 400m/s tới xuyên vào đầu kia của thanh và mắc vào thanh. Tìm vận tốc góc của thanh ngay sau khi viên đạn đập vào thanh. Biết rằng mômen quán tính của thanh đối với trục quay bằng 5kgm^2.

**** Nhận xét:*** Nhìn qua thì thấy đây chính là bài toán va đập rồi, éo thể sai được. Trong mấy bài toán va chạm trong chuyển động thẳng trước đây ta thường sử dụng định luật bảo toàn động lượng. Còn trong chuyển động quay thì cũng thế chỉ thêm mỗi chữ mômen vào là xong. Người ta gọi đó là định luật bảo toàn động lượng. Nhớ lại định luật bảo toàn động lượng là:

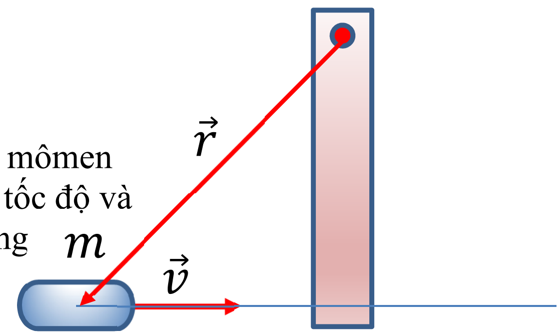
$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$$

Làm phép qui đổi là ta có thể ra ngày thằng định luật bảo toàn mômen động lượng là:

$$I_1\overrightarrow{\omega_1} + I_2\overrightarrow{\omega_2} = I_1\overrightarrow{\omega'_1} + I_2\overrightarrow{\omega'_2}$$

Bây giờ chúng ta sẽ phân tích tiếp vào bài toán. Nói đến mômen thì phải nói đến quay giống như thịt chó thì phải có mắm tôm, mà đã nói đến quay thì phải nói đến quay tay, nhầm phải nói đến trục quay. Tức là phải quay trong cái gì chứ.
Để áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng thì ta phải xác định được mômen động lượng của hệ trước và sau khi va chạm. Nên nhớ là mômen động lượng có hai công thức tính khác nhau đấy nhé:
Công thức 1: $\vec{L} = I\vec{\omega} \rightarrow L = I\omega$
Công thức 2: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow L = r.p.sin\theta$

**** Giải:***



- Xét hệ trước va chạm: trước khi va chạm dễ thấy là thanh thì đứng yên thì đào đâu ra mômen động với cả chả lượng. Có mỗi viên đạn có tốc độ và khối lượng như vậy nó mang một động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$, giờ để ý muốn tìm mômen động lượng thì phải tìm ra được tâm quay và khoảng cách từ tâm quay tới phương của vận tốc, nhìn thì biết ngay khoảng cách từ tâm quay tới viên đạn chính là độ dài *l* (nếu thích tính theo kiểu vector thì r.sinθ nó cũng ra *l* thôi). Như vậy mômen động lượng trước khi va chạm là:

$$\boldsymbol{L_{trước} = r.p.sin\theta = l.p = mvl}$$

- Xét hệ sau va chạm: viên đạn thúc quá mạnh vào thanh đến mức ko rút ra được và kết quả là dính chặt vào thanh cmnl rồi. Giờ thì rút ra bằng niềm tin nhé đạn, cái này chính là va chạm mềm. Sau khi va chạm thì cả thanh và đạn tất nhiên là sẽ có cùng vận tốc góc ω, nên sẽ sử dụng công thức (1) cho nó tiện. Giờ chỉ cần xác định mômen quán tính của từng chú là xong:

- Thanh: quá đơn giản vì đề bài cho mẹ nó rồi còn đâu $\boldsymbol{I_{th} = 5kgm^2}$
- Đạn: còn đơn giản hơn, có khối lượng có khoảng cách tới trục quay rồi thì cứ công thức kinh điển ***m.r²*** ở đây r chính là lờ thôi nên thay cuối cùng ta có: $\boldsymbol{I_{đ} = ml^2}$.

Tóm lại sau khi va chạm mômen động lượng của hệ là:

$$\boldsymbol{L_{sau} = I_{th}\omega + I_{đ}\omega = (I_{th} + ml^2)\omega}$$

Giờ thì áp dụng công thức kinh điển LOL sau bằng LOL trước là xong:

$$\boldsymbol{mvl = (I_{th} + ml^2)\omega}$$

Chốt hạ thôi:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{mvl}{I_{th} + ml^2} = \frac{0.01 \times 400 \times 0.5}{5 + 0.01 \times 0.5^2} \approx 0.4\, rad/s}$$

Bài 3-12: Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m_1 = 100kg quay với vận tốc góc ω_1 = 10 vòng/phút. Một người khối lượng m_2 = 60kg đứng ở mép đĩa. Hỏi vận tốc góc của đĩa khi người đi vào đứng ở tâm của đĩa. Coi người như một chất điểm.

**** Nhận xét:*** Bài toán liên quan tới định luật bảo toàn mômen động lượng tiếp, cái thao tác người đi vào tâm chẳng qua là thay đổi mômen quán tính của hệ thôi chứ chả có cái quái gì là kinh khủng, khó hiểu ở đây. Nhận xét một cách hoàn toàn trực giác như thế này. Khi người đi vào gần tâm có nghĩa là khoảng cách của người với tâm quay sẽ giảm dần và kết quả là mômen quán tính của người sẽ giảm đi. Điều này kéo theo mômen quán tính của hệ sẽ giảm đi, và tất nhiên khi anh mômen quán tính giảm thì em ômega éo thể chịu được bèn tăng tốc lên để đảm bảo là tềnh yêu chúng ta là không đổi, tức là mômen động lượng phải được bảo toàn. Tóm lại chưa cần tính thì các bạn có thể đoán được ω sẽ tăng rồi, nếu thấy đề trắc nghiệm mà có ba thằng nhỏ hơn vận tốc góc ban đầu thì thôi ko cần tính đâu, chọn luôn thằng còn lại là chuẩn cơm mẹ nấy rồi.

* Giải: Cũng như trên thôi, lại chia thành 2 giai đoạn LOL trước và LOL sau thôi.

- Giai đoạn trước: mômen động lượng của hệ sẽ là:

$$L_{trước} = I_{đĩa}\omega_1 + I_{người}\omega_1$$

Nhìn vào công thức thì thấy có mỗi ω1 thì đề bài cho, còn lại mômen quán tính của người và đĩa thì éo cho. Nhìn lại đề bài thì thấy may quá, nó có cho mình khối lượng đĩa và người, lại còn cho biết người là chất điểm nữa. Tóm lại, thuận cmn lợi rồi, chiến thôi:

- Mômen quán tính đĩa đặc như đã biết là: $I_{đĩa} = \frac{m_1R^2}{2}$
- Mômen quán tính của người (chất điểm) là: $I_{người} = m_2R^2$

Tổng kết ta có:

$$L_{trước} = (I_{đĩa} + I_{người})\omega_1 = \left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)\omega_1$$

- Giai đoạn sau: để ý là khi người đi vào tâm đĩa thì coi như khoảng cách từ người tới tâm đĩa là zero rồi. Điều này kéo theo mômen quán tính của người với tâm đĩa coi như bằng 0 rồi. Lúc này LOL sau sẽ có dạng:

$$L_{sau} = I_{đĩa}\omega_2 = \frac{m_2R^2}{2}\omega_2$$

Lại summon công thức LOL kinh điển thôi:

$$\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)\omega_1 = \frac{m_1R^2}{2}\omega_2$$

$$\rightarrow \omega_2 = \frac{0.5m_1 + m_2}{0.5m_1}\omega_1 = \frac{0.5 \times 100 + 60}{0.5 \times 100} \times 10 = 22\ vòng/phút$$

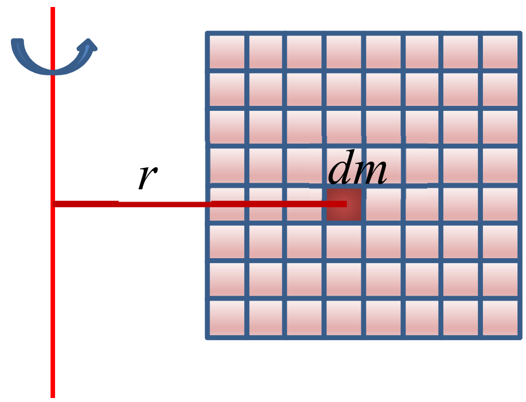
DẠNG 3: XÁC ĐỊNH MÔMEN QUÁN TÍNH

3.1. Kiến thức cơ bản:

- Phần này thực sự hay nhưng mà khó, vì nó dính tới một cục xương mà các bạn chả bao giờ muốn gặm nhưng vẫn bị bắt phải gặm cho bằng hết. Đó chính là tích phân. Cấp 3 thì chúng ta chỉ biết hì hục tính tích phân như một cái máy, cứ hì hục biến đổi về công thức cơ bản rồi táng rất nhiệt tình sau đó vênh mặt tự sướng và ATSM rằng mình pro vãi cả đ. Tuy nhiên, nếu chỉ hỏi thế ứng dụng của tích phân để làm cái éo gì thế là y rằng 99% các con giời pó tay. Một số ít trả lời được là ứng dụng để tính diện tích. Nói thực là nếu chỉ dùng để tính diện tích thôi thì các bạn học làm éo gì cho nó tốn thời gian. Tích phân thì ứng dụng của nó là vô hạn đặc biệt trong ngành toán và lý. Tất nhiên bạn nào muốn biết nó ứng dụng thế nào trong toán thì xin mời cầy nát quyển toán cao cấp giải tích ra. Còn trong phạm vi bài này tôi sẽ hướng dẫn những con gà về tích phân cách sử dụng nó để giải các bài toán về vật lý.
- Nói thật là 99% các bạn lên lớp gặp bài toán là tích phân là chỉ biết thầy chép sao thì làm vậy, chả hiểu các bước cần thiết để giải toán bằng tích phân. Đến lúc thi thì hì hục học thuộc các bước và cố nhớ bằng được các bước với các công thức để tính. Học thế thì học làm zề cho tốn cơm tốn gạo. Rất tiếc là tôi cũng nằm trong số thể loại tốn cơm tốn gạo vì nói thật hồi đó tôi cũng chả hiểu cái quái gì vì làm gì có ai hướng dẫn tỉ mỉ đâu. Các thầy thì cứ lên lớp chém như trong sách xong giải tán về nhà tự học nhé. Mà mấy ai về nhà tự học được khi xung quanh biết bao nhiêu cám dỗ, vừa ngồi học tý thì gấu lại alo gọi đi đón, không thì lại rủ nhau LOL, AOE. Chính vì thế đã dốt lại càng dốt thêm :v.
- Thôi chém thế thôi, giờ quay vào chủ đề chính. Trong phần này chúng ta sẽ ứng dụng tích phân để tính mômen quán tính của các vật đồng chất đơn giản. Sau phần này các bạn sẽ nắm vững cách thiết lập công thức tính mômen quán tính của các vật như thanh đồng chất, vành, trụ, đĩa, cầu. Mấy cái này thì có công thức cả rồi nhưng hỏi do dâu mà có công thức này thì chắc được vài thím có thể trả lời được. Như ta đã biết công đối với mômen quán tính thì công thức tổng quát tính theo tích phân chính là.

$$I = \int_{vật} r^2 dm$$

Hãy tưởng tượng chia một vật thành các phần tử khối lượng vô cùng nhỏ, và khoảng cách từ phần tử đó tới trục quay là r. Khi đó mômen quán tính của phần tử đó với trục quay sẽ là $r^2 dm$. Chính là khối lượng nhân với bình phương khoảng cách thôi, chả có gì phức tạp đâu. Bản chất của phép tích phân chính là phép scan thôi. Nhìn hình vẽ bên, thì để tính mômen quán tính của toàn hình vuông thì chúng ta cứ quét từng ô một rồi cộng tất cả với nhau. Tích phân chính là cộng hết cmn chúng nó vào nhau là xong. Vậy thế thì nó khác gì với tổng xích ma đâu mà phải phân biệt hai khái niệm làm gì. Khi chúng ta chia một vật thành vô hạn các phần tử super nhỏ gọi là vi phân thì lúc đấy tổngxích ma sẽ chuyển thành tích phân. Còn nếuchia thành hữu hạn các phần tử thì tổng xích ma mà chiến thôi. Nhưng nói chung qui về tích phân là tiện nhất vì chúng ta có một loạt các công thức cơ bản để tính tích phân một cách vô cùng đơn giản chứ ko như tổng xích ma.



- Đối với bài toán dùng tích phân để tính mômen quán tính thì điều khó khăn nhất nếu các bạn chưa có kinh nghiệm chính là không biết bắt đầu từ đâu. Vì chẳng biết chia vật thành các phần tử vi phân thế nào cho chuẩn để dễ áp dụng công thức tính. Chứ ra được công thức tích phân rồi thì việc tính toán chắc là quá muỗi đối với chúng ta rồi.
- Sau đây tôi sẽ trình bày các bước để tính mômen quán tính theo tích phân dưới góc nhìn của một người đầu bếp:

Bước 1 – Thái thịt: Để áp dụng tích phân ta phải tiến hành vi phân vật thể, tức là cắt vật thể thành một số hình dạng đặc biệt. Công đoạn này rất quan trọng vì nếu chúng ta thái nhầm thì xác định cmnl đó. Nó cũng giống như khi các bạn thái thịt, nếu các bạn thái dọc thớ thì miếng thịt dai vcđ, ăn có khi gãy răng, nhưng nếu thái ngang thớ thì dễ chén hơn nhiều. Nói thật bước này quan trọng nhất vì nếu thái chuẩn thì bạn sẽ có một tích phân siêu dễ, nếu thái ngu thì sẽ gặp tích phân siêu khó. Sau đây là kinh nghiệm thái những miếng thịt có hình dạng đặc biệt.

- Thanh, cung tròn, vành tròn → thái thanh thành từng đoạn dx → vi phân chiều dài.
- Mặt phẳng vô hạn, đĩa tròn → thái thành từng vành tròn có bán kính trong x bán kính ngoài $x + dx$ → vi phân diện tích $dS = 2\pi x dx$ (được xác định bởi công thức tính diện tích vành tròn $dS = \pi(x + dx)^2 - \pi x^2 \approx 2\pi x dx$, trong đó loại bỏ các giá trị dx^2 do rất bé, chính ra diện tích hình tròn có bán kính lớn trừ đi diện tích hình tròn có bán kính nhỏ thôi).
- Trụ → thái thành những trụ mỏng có độ rộng vành trụ dx và thể tích dV.
- Cầu đặc → thái thành những đĩa nhỏ
- Mặt cầu bán kính r → thái thành các đới cầu → vi phân diện tích $dS = 2\pi r.Rd\theta$ (được xác định bởi công thức tính diện tích đới cầu).

Bước 2 – Cân thịt: Mômen quán tính thì liên quan tới khối lượng nên ở bước thứ hai sẽ là bước cân thịt. Tức là đi xác định khối lượng của miếng thịt mình vừa thái ở bước 1. Khối lượng miếng thịt từ bước 1 là *dm* nhé (ko phải định mệnh đâu đấy). Ở đây chúng ta sẽ tìm mối liên hệ giữa khối lượng miếng thịt *dm* với hình dạng miếng thịt ở trên thông qua khối lượng riêng của miếng thịt. Để đơn giản ta chia là 3 loại: loại miếng dài (1 chiều) có khối lượng trên một đơn vị độ dài λ (kg/m), loại miếng dẹt, phong cách bi tết (2 chiều) có khối lượng trên một đơn vị diện tích là σ (kg/m^2), loại miếng khối, phong cách bò lúc lắc (3 chiều) có khối lượng trên một đơn vị thể tích là ρ (kg/m^3).

- Loại thịt dài: $dm = \lambda dx$
- Loại thịt dẹt: $dm = \sigma dS$
- Loại thịt khối: $dm = \rho dV$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Bước tiếp theo là chúng ta chọn công thức để nấu, ở đây ta chọn món mômen quán tính, có công thức cho một suất ăn là:

$$dI = r^2 dm$$

Tất nhiên tùy theo loại thịt dài, dẹt hay khối thì ta thay *dm* tương ứng vào công thức trên thôi.

Bước 4 – Nấu: Bước này là bước chúng ta nấu bằng cách đặt tích phân vào. Đặt tích phân vào thì cũng đơn giản thôi, nhưng quan trọng nhất là phải tìm đươc cận của tích phân. Cái này thì phải dựa vào giới hạn miếng thịt, tính chất đối xứng của miếng thịt. Ngoài ra còn phải căn cứ theo vị trí trục quay.

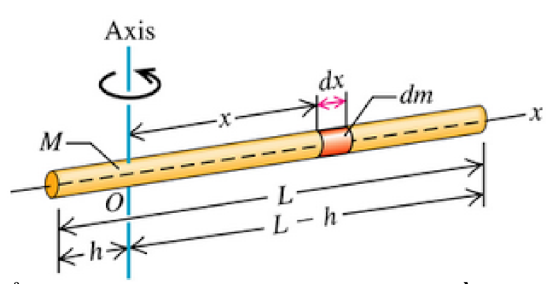
- Ở dạng này nên chú ý định lý Huyghen nữa là làm tuốt:

$$\boldsymbol{I_z = I_o + MD^2}$$

I_o là trục quay đi qua khối tâm, I_z là trục quay bất kì song song với I_o, D là khoảng cách giữa hai trục quay, M là khối lượng của vật.

3.2. Bài tập ví dụ:

Bài 1: Xác định mômen quán tính của thành dài đồng chất có trục quay đi qua và vuông góc với thanh như hình vẽ bên



Bước 1 – Thái thịt: Dạng thanh nhé, kiểu gì cũng thái thành đoạn *dx* rồi. Chia thanh thành các phần tử độ dài *dx* cách trục quay một khoảng là *x*.

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của phần tử độ dài dx là:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Khối lượng trên một đơn vị dài chính bằng khối lượng thanh M chia cho chiều dài thanh L thôi.

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Mômen quán tính của phần tử dm sẽ là:

$$dI = x^2 dm = \frac{M}{L} x^2 dx$$

Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của thanh. Quan trọng nhất là xác định được cận tích phân là xong. Để ý nếu cho phần tử dm quét dọc thanh từ trái qua phải thì cận dưới sẽ là –h cận trên sẽ là L – h, với chiều dương từ trái qua phải. Như vậy ta có:

$$I = \int_{-h}^{L-h} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3} \frac{M}{L} (L^3 - 3L^2 h + 3Lh^2 - h^3 + h^3)$$

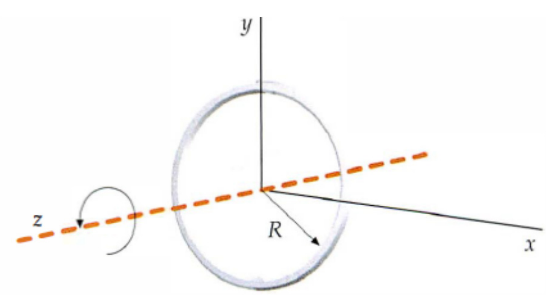
$$\rightarrow I = \frac{1}{3} M (L^2 - 3Lh + 3h^2)$$

Từ đây ta có thể dễ dàng suy ra một số trường hợp đặc biệt.

- Nếu trục quay ở đầu thanh: h = 0 → $I = \frac{ML^2}{3}$

- Nếu trục quay ở giữa thanh: h = L/2 → $\boldsymbol{I = \frac{ML^2}{12}}$ → nhìn quen chưa??? ☺

Bài 2: Tính mômen quán tính của vành tròn đồng chất có khối lượng M và bán kính R, quanh trục đi qua tâm của nó.



Bước 1 – Thái thịt: Dạng vành nhé, kiểu gì cũng thái thành đoạn *dx* rồi. Chia thanh thành các phần tử độ dài *dx* cách trục quay một khoảng là *R* không đổi.

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của phần tử độ dài dx là:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx = \frac{M}{2\pi R} dx$$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Để ý là các điểm trên phần tử dm do ta chọn quá khéo nên nó đều cách đều trục quay. Do đó, mômen quán tính của phần tử *dm* sẽ là: (nếu chọn ko khéo dẫn đến các điểm trên dm không cách đều trục quay thì coi như tạch vì ko thể dùng công thức này được)

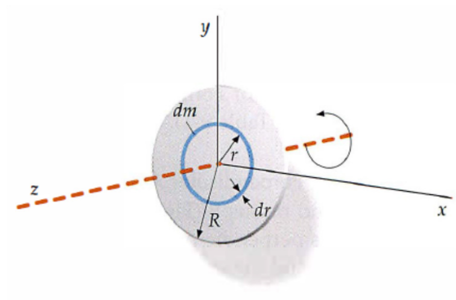
$$dI = R^2 dm = R^2 \frac{M}{2\pi R} dx = \frac{MR}{2\pi} dx$$

Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của vành. Để ý nếu cho phần tử dm quét vòng tròn giả sử từ gốc O ứng với cận dưới bằng 0 thì đến khi nó quét xong 1vòng thì cận trên tương ứng chính là chu vi đường tròn tức là $2\pi R$

$$I = \int_0^{2\pi R} \frac{MR}{2\pi} dx = \frac{MR}{2\pi} x\Big|_0^{2\pi R} = MR^2$$

Quá đơn giản phải không? ☺

Bài 3: Xác định mômen quán tính của đĩa tròn đồng chất có khối lượng M và bán kính R. Trục quay đi qua tâm của đĩa.



Bước 1 – Thái thịt: Dạng đĩa nhé, kiểu gì cũng thái thành vành có diện tích dS rồi. Độ rộng vành là *dr*, chú ý diện tích của vành $dS = 2\pi r dr$. Sở dĩ nên qui đổi hết ra đơn vị chiều dài *r* là vì sẽ đơn giản hơn là tính theo biến S. Thể tích cũng vậy, nên qui đổi ra đơn vị chiều dài.

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của phần tử độ dài dx là:

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{S} dS = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2Mr}{R^2} dr$$

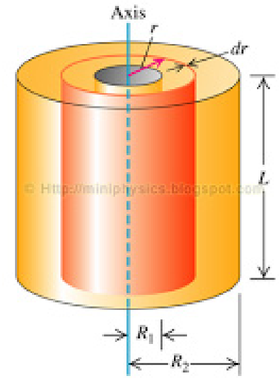
Bước 3 – Chọn công thức nấu: Để ý là các điểm trên phần tử dm do ta chọn quá khéo nên nó đều cách đều trục quay. Do đó, mômen quán tính của phần tử *dm* sẽ là: (nếu chọn ko khéo dẫn đến các điểm trên dm không cách đều trục quay thì coi như tạch vì ko thể dùng công thức này được)

$$dI = r^2 \frac{2Mr}{R^2} dr$$

Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của vành. Để ý nếu cho phần tử dS quét từ tâm ứng với cận dưới là *r* = 0, thì ra ngoài rìa ngoài cùng ta sẽ có cận tương đương là *r* = *R*

$$I = \int_0^R \frac{2Mr^3}{R^2} dr = \frac{Mr^4}{2R^2}\Big|_0^R = \frac{MR^2}{2}$$

Bài 4: Xác định mômen quán tính của trụ rỗng đồng chất có bán kính trọng R_1 bán kính ngoài R_2. Trục quay là trục của trụ. Trụ có chiều cao L



Bước 1 – Thái thịt: Dạng trụ khối, kiểu gì cũng thái thành trụ mỏng có chiều dày dr, có thể tích dV, có diện tích của vành $dS = 2\pi r dr$. Như vậy có thể tìm mối quan hệ giữa dV và dr để đổi biến cho thuận tiện.

$$dV = L.dS = 2\pi L r dr$$

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của phần tử độ dài dx là:

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V}dV = \frac{M}{\pi {R_2}^2 L - \pi {R_1}^2 L}2\pi L r dr = \frac{2Mrdr}{{R_2}^2 - {R_1}^2}$$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Mômen quán tính của phần tử *dm* sẽ là:

$$dI = r^2 dm = \frac{2Mr^3 dr}{{R_2}^2 - {R_1}^2}$$

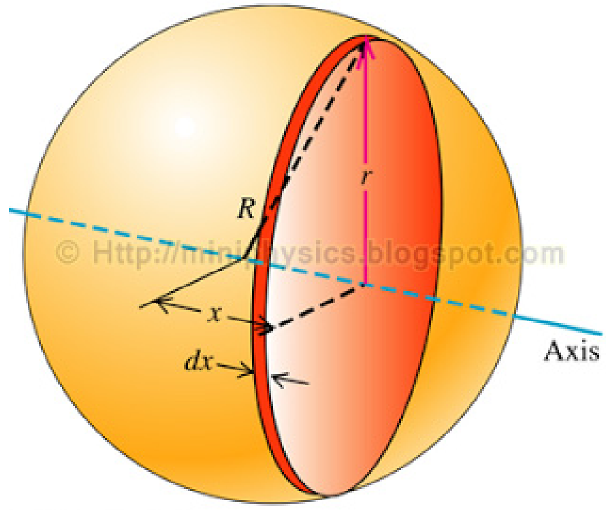
Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của vành. Để ý nếu cho phần tử dS quét từ vành trong ứng với cận dưới là $r = R_1$, thì ra ngoài rìa ngoài cùng ta sẽ có cận tương đương là $r = R_2$

$$\boldsymbol{I = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2Mr^3 dr}{{R_2}^2 - {R_1}^2} = \frac{1}{2}\frac{Mr^4}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2}M\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)}$$

Giờ xét các trường hợp đặc biệt nhé:

- Vành trụ: $R_1 = R_2 = R \rightarrow I = MR^2$
- Trụ đặc: $R_1 = 0$, $R_2 = R \rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$

Bài 5: Tính mômen quán tính của khối cầu đặc đồng chất bán kính R và có khối lượng M. Trục quay đi qua tâm của khối cầu



Bước 1 – Thái thịt: Dạng khối cầu đặc, thái thành các đĩa mỏng, có chiều dày dx và thể tích dV. Có thể coi như đĩa có dạng trụ mỏng bán kính r và chiều cao dx. Khi đó ta có:

$$dV = S.dx = \pi r^2 dx$$

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của đĩa mỏng lúc này là:

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V}dV = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi r^2 dx = \frac{3M}{4R^3}r^2 dx$$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Như đã biết mômen quán tính của đĩa đặc được tính theo công thức $I = \frac{1}{2}mr^2$. Áp dụng vào bài này ta có mômen quán tính của phần tử *dm* sẽ là:

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{3M}{8R^3}r^4 dx$$

Để ý pt trên có biến r và dx → tính tích phân bằng niềm tin → tìm cách biến đổi r về x hoặc x về r. Ở đây, biến đổi r về x là dễ hơn nên ta sẽ tìm mối quan hệ giữa r và x xem sao. Nhìn thấy tam giác vuông chưa các thím?

$$R^2 = r^2 + x^2 \to r^2 = R^2 - x^2$$

Suy ra:

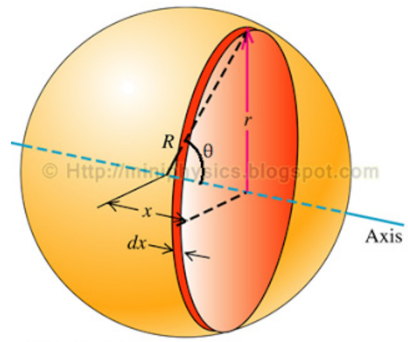
$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{3M}{4R^3}(R^2 - x^2)^2 dx$$

Giờ chỉ cần tìm cận tích phân là xong

Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của khối cầu. Để ý nếu cho phần tử dV quét từ trái ứng với cận dưới là $x = -R$, thì khi quét đến tận cùng bên phải ta sẽ có cận tương đương là $x = R$.

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{3M}{8R^3}(R^2 - x^2)^2 dx = XXX = \frac{3M}{8R^3}\frac{16}{15}R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

Bài 6: Tính mômen quán tính của khối cầu rỗng đồng chất bán kính R và có khối lượng M. Trục quay đi qua tâm của khối cầu



Bước 1 – Thái thịt: Dạng khối cầu rỗng, thái thành các đới cầu mỏng, có chiều dày dx và diện tích dS. Có thể coi như đới cầu có dạng trụ mỏng bán kính r và chiều cao dx. Khi đó ta có:

$$dS = 2\pi r \times Rd\theta$$

$2\pi r$ là chu vi của đới cầu đó, $Rd\theta$ độ dài mặt cong (nhớ là trong toán học độ dài cung tròn bằng bán kính nhân với góc ở đỉnh, cái này cũng thế thôi)

Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng của đĩa mỏng lúc này là:

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{S}dS = \frac{M}{4\pi R^2}2\pi rRd\theta = \frac{M}{2R}rd\theta$$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Như đã biết mômen quán tính của đĩa mỏng được tính theo công thức $I = mr^2$. Áp dụng vào bài này ta có mômen quán tính của phần tử *dm* sẽ là:

$$dI = r^2 dm = \frac{M}{2R}r^3 d\theta$$

Để ý pt trên có biến r và θ → tính tích phân bằng niềm tin → tìm cách biến đổi r về θ. Để ý thấy $r = Rsin\theta$, thay vào ta có

$$dI = \frac{M}{2R}(Rsin\theta)^3 d\theta = \frac{MR^2}{2}sin^3\theta d\theta$$

Giờ chỉ cần tìm cận tích phân là xong

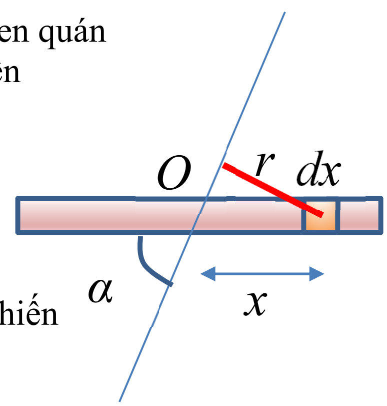
Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của khối cầu rỗng. Để ý nếu cho phần tử dS quét từ phải qua trái thì góc θ sẽ thay đổi từ 0 đến π → cận chính là từ 0 đến π.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{MR^2}{2}sin^3\theta d\theta = \frac{MR^2}{2}\int_0^{\pi}(cos^2\theta - 1)d(cos\theta)$$

$$I = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{cos^3\theta}{3} - cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}MR^2$$

Bài 3-13: Xác định mômen quán tính của một thanh đồng chất dài một khối lượng m đối
với các trục sau đây:
a) Trục đi qua điểm giữa của thanh và tạo với thanh một góc α nào đó.
b) Trục song song với thanh và cách thanh một đoạn *d*.
c) Trục vuông góc với thanh và cách điểm giữa thanh một đoạn *d*.

**** Nhận xét:*** bài toán liên quan đến thiết lập mômen quán tính của thanh. Tích phân mà chiến thôi. Tuy nhiên với câu b và c, tiện lợi hơn khi sử dụng định lý Huyghen-Steiner. Để sử dụng định lý này thì chúng ta cần follow theo hai bước, bước 1 là xác định mômen quán tính đi qua khối tâm, bước 2 là xác định khoảng cách giữa hai trục quay. Xong hai bước thì cứ thay vào định lý mà chiến thôi.



**** Giải:***
Bước 1 – Thái thịt: Dạng thanh, thái thành các đoạn nhỏ *dx* có khối lượng *dm*.
Bước 2 – Cân thịt: Khối lượng *dm* lúc này sẽ là:

$$dm = \lambda dx = \frac{m}{L}dx$$

Bước 3 – Chọn công thức nấu: Mômen quán tính của phần tử dm lúc này sẽ là:

$$dI = r^2 dm = r^2\frac{m}{L}dx$$

Để ý là biến r liên quan tới biến x nên tốt nhất là đổi về biến x tính cho dễ

$$dI = (xsin\alpha)^2\frac{m}{L}dx = \frac{m}{L}sin^2\alpha.x^2dx$$

Bước 4 – Nấu: Sử dụng tích phân để xác định mômen quán tính của thanh. Nào đi tìm cận đã nào. Giả sử quét từ trái qua phải thì x sẽ thay đổi từ $-\frac{L}{2}$ đến $\frac{L}{2}$ (thực ra ai thích thì lấy mốc từ 0 đến L cũng được, như nhau thôi).

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{m}{L}sin^2\alpha.x^2dx = \frac{m}{L}sin^2\alpha.\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L}sin^2\alpha\frac{L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}sin^2\alpha$$

- Sang đến câu b, như đã nói ở trên gồm có 2 bước. Bây giờ ta follow theo hai bước cho nó dễ vậy.
  - Bước 1. Vẽ trục quay đi qua khối tâm và nằm dọc theo thanh, sở dĩ phải chọn nằm dọc là vì trục cần tìm mômen quán tính của chúng ta song song với thanh mà. Dễ thấy mọi điểm nằm trên thanh đều trùng với trục quay → khoảng cách tới trục quay là bằng zero → mômen quán tính bằng 0 cmnl.
  - Bước 2. Khoảng cách giữa trục quay đi dọc theo thanh và trục quay chúng ta đang cần tìm là *d* → đề bài cho rồi nhé, chứ ko phải đi tìm nữa.
  - Áp dụng định lý Huyghen-Steiner ta có:

$$\boldsymbol{I = 0 + md^2 = md^2}$$

Tất nhiên ai thích thể hiện thì có thể sử dụng tích phân mà tính cũng được.
- Câu c cũng tương tự:
  - Bước 1. Trục quay cần tìm vuông góc với thanh nên ta phải tìm mômen quán tính của thanh đối với trục quay đi qua trung điểm và vuông góc với thanh. Cái này thì đến con bò nó cũng biết công thức là: $I_0 = \frac{mL^2}{12}$
  - Bước 2. Khoảng cách hai trục quay là *d* đã biết rồi → chiến thôi.

$$\boldsymbol{I = \frac{mL^2}{12} + md^2 = \left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)m}$$

DẠNG 4: ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN QUAY

4.1. Kiến thức cơ bản:

- Đây là dạng bài giành cho những fan cuồng của quay tay. Trong bài này thường sẽ kết hợp kiến thức động lực học trong chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay. Một điểm rất dễ nhận thấy là hệ nghiên cứ kiểu éo gì cũng có một thằng nào đó quay t

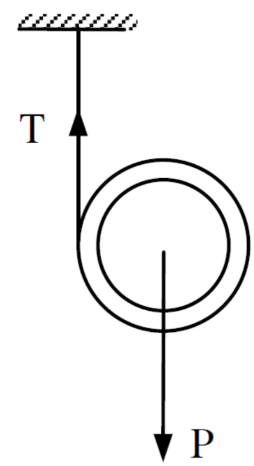
- Để làm được các bài dạng này thì phải biết phân tích chuyển động của vật xem nó là gì, nếu nó chuyển động tịnh tiến thì cứ summon anh Newton II (F = ma) ra, còn nếu chuyển động quay thì chuyển giới anh Newton II sang dạng quay (M = I.β thôi.

- Tiếp theo phải chú ý mấy công thức thể hiện mối quan hệ giữa chuyển động thẳng và chuyển động quay để còn áp dụng tính toán cho tiện. Mấy công thức sau là cần phải biết và thuộc lòng:

$$v = \omega r \to a_t = \beta r$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

4.2. Bài tập ví dụ



Bài 4.19: Trên một trụ rỗng khối lượng m = 1kg, người ta cuộn một sợi dây không gian có khối lượng và đường kính nhỏ không đáng kể. Đầu tự do của dây được gắn trên một giá cố định (hình vẽ). Để trụ rơi dưới tác dụng của trọng lượng. Tìm gia tốc của trụ và sức căng của dây treo.

**** Nhận xét:*** Nhìn hình vẽ thấy trụ rỗng sẽ lăn và đi thẳng xuống dưới. Như vậy, hệ gồm hai thành phần chuyển động là chuyển động tịnh tiến xuống dưới và chuyển động quay của trụ. Một chú ý nữa chính là trụ rỗng. Vì phương trình động lực học của chuyển động quay liên quan tới mômen quán tính I nên rất cần phải biết hình dạng cụ thể của vật để mà còn tính được mômen quán tính. Đối với bài toán dạng này thì cách tốt nhất là chia thành hai loại chuyển động và thiết lập phương trình động lực học cho từng loại là xong.

**** Giải:***

- Chuyển động tịnh tiến: rõ ràng là trụ chịu tác dụng của hai lực $\vec{P}$ và lực căng dây $\vec{T}$ nên theo định luật II Newton ta có:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Giả sử chiều dương hướng xuống dưới ta chiếu lên trục và chú ý là trụ rơi nhanh dần đều nên gia tốc của nó cũng hướng xuống dưới đó.

$$P - T = ma$$

- Chuyển động quay: Muốn lập phương trình động lực học thì quan trọng nhất phải đi xác định mômen lực, mà muốn xác định mômen lực thì phải xác định lực và khoảng cách từ tâm quay tới lực đấy. Để ý hệ của chúng ta chỉ có mỗi hai chú là $\vec{P}$ và $\vec{T}$. Giờ phân tích hai lực này cái nhể. Lực P đi qua tâm quay của trụ như vậy là mômen lực của thằng P này coi như bằng 0 rồi. Tiếp đến lực T ta thấy tiếp tuyến với trụ, nên khoảng các từ tâm quay của trụ đến lực T chính bằng R. Như vậy ta có:

$$R.T = I\beta$$

Như vậy ta có hai phương trình động lực học, giờ chỉ cần link hai phương trình này với nhau dựa theo mối quan hệ giữa gia tốc góc và gia tốc tịnh tiến.

$$v = \omega R \rightarrow a = \beta.R$$

Thay vào ta có hệ pt

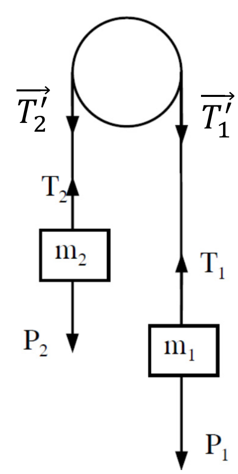
$$\begin{cases} P - T = m\beta R \\ RT = I\beta = mR^2\beta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} T = mg - m\beta R \\ T = mR\beta \end{cases} \rightarrow mg - m\beta R = mR\beta$$

$$\boldsymbol{\rightarrow \beta = \frac{g}{2R} = \frac{10}{2R} = \frac{5}{R}\left(\frac{rad}{s^2}\right) \rightarrow a = \beta.R = \frac{g}{2} = \frac{10}{2} = 5\left(\frac{m}{s^2}\right)}$$

Lực căng T thì quá đơn giản rồi:

$$\boldsymbol{T = mR\beta = \frac{gm}{2} = \frac{10 \times 1}{2} = 5(N)}$$

Bài 3.20: Hai vật có khối lượng lần lượt bằng m_1 và m_2 ($m_1 > m_2$), được nối với nhau bằng một sợi dây vắt qua một ròng rọc (khối lượng của ròng rọc bằng m) (hình vẽ). Tìm:
a) Gia tốc của các vật;
b) Sức căng T_1 và T_2 của các dây treo. Coi ròng rọc là một đĩa tròn; ma sát không đáng kể. Áp dụng bằng số: m_1 = 2 kg, m_2 = 1 kg; m = 1 kg.
* Nhận xét: Hệ gồm 3 vật rõ ràng, trong đó có hai vật chuyển động tịnh tiến, và ròng rọc chuyển động quay. Như vậy với hai vật m_1 và m_2 thì phải sử dụng phương trình động lực học cho chuyển động tịnh tiến, còn với ròng rọc thì sử dụng phương trình động lực học cho chuyển động quay.



* Giải:
- Chuyển động tịnh tiến:

- Xét vật m_1: $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} = m_1\overrightarrow{a_1}$. Chọn chiều dương cho vật m1 có chiều dương hướng xuống dưới. Chiếu lên trục này ta có:

$$P_1 - T_1 = m_1 a_1 \leftrightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

- Xét vật m_2: $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = m_2\overrightarrow{a_2}$. Chọn chiều dương cho vật m2 hướng lên trên. Chiếu lên trục này ta có:

$$T_2 - P_2 = m_2 a_2 \leftrightarrow T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

- Chuyển động quay: ròng rọc chuyển động quay. Chú ý quan trọng nhất khi xét chuyển động quay là qui ước chiều + của chuyển động quay, để từ đó xác định chiều dương của mômen lực. Từ chiều quay ta có thể xác định chiều của mômen lực theo qui tắc bàn tay phải. Ta có thể coi ròng rọc là đĩa đặc đồng chất nên mômen quán tính của nó là:

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Hai lực tác dụng lên ròng rọc chính là hai lực căng của dây $\overrightarrow{T_1'}$ và $\overrightarrow{T_2'}$. Đặc điểm của hai lực này là trực đối với hai lực căng dây $\overrightarrow{T_1}$ và $\overrightarrow{T_2}$. Giờ phân tích mômen lực gây bởi $\overrightarrow{T_1'}$ và $\overrightarrow{T_2'}$ lên ròng rọc nào các thím. Qui ước chiều dương thuận kim đồng hồ → theo qui tắc bàn tay phải thì chiều dương của mômen lực hướng vào trong nhé. Nếu thằng lực căng nào gây ra mômen lực hướng vào trong thì coi như mômen lực của thằng đấy mang dấu dương. Dễ thấy mômen lực gây bởi $\overrightarrow{T_2'}$

dương nhé, còn của $\overrightarrow{T_1'}$ thì âm lòi ra. Không tin thì cứ thử chếch hàng mà xem. Khoảng cách từ trục quay tới phương của hai lực này đều bằng R. Ròng rọc quay nhanh dần đều với gia tốc góc $\vec{\beta}$ nên gia tốc này cùng chiều với mômen lực gây bởi $\overrightarrow{T_2'}$. Trong trường hợp mà loạn hết cả lên mà ko biết chọn chiều thế nào thì đơn giản nhất là lấy thằng mômen lực lớn trừ đi thằng mômen lực bé và cho bằng mômen quán tính I nhân thẳng với gia tốc góc β là xong. Đỡ khỏi chiếu chiếc gì cho mất thời gian. Ta có:

$$T_1'R - T_2'R = I\beta \rightarrow (T_1 - T_2)R = \frac{mR^2}{2}\beta \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{mR\beta}{2}$$

Giờ tổng hợp 3 pt thu được rồi ngồi nghĩ các giải thôi:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_1 - T_2 = \dfrac{mR\beta}{2} = \dfrac{m a_3}{2} \end{cases}$$

Nhiều ẩn vcđ → xem có triệt tiêu được thằng nào không. Dễ thấy three some a_1, a_2, a_3 về độ lớn là như nhau nên có thể coi như bằng giá trị a nào đó → qui 3 ẩn về 1 ẩn. Giờ thì đơn giản đi nhiều rồi.

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 a \\ T_1 - T_2 = \dfrac{ma}{2} \end{cases}$$

Nhìn đây thì thấy đơn giản nhất là lấy T_1 và T_2 ở hai pt đầu trừ đi nhau rồi kết hợp với pt thứ 3 là dễ dàng ra được phương trình 1 ẩn duy nhất là a.

$$m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a = \frac{ma}{2} \rightarrow \boldsymbol{a = \frac{m_1 g - m_2 g}{(0.5m + m_1 + m_2)}}$$

Lực căng của dây treo thì chỉ việc thay giá trị a vào là xong. Dài dã man con ngan:

$$\boldsymbol{T_1 = m_1 g - m_1 \frac{m_1 g - m_2 g}{(0.5m + m_1 + m_2)} = \frac{(0.5m + 2m_2) m_1 g}{0.5m + m_1 + m_2}}$$

$$\boldsymbol{T_2 = m_2 g + m_2 \frac{m_1 g - m_2 g}{(0.5m + m_1 + m_2)} = \frac{(0.5m + 2m_1) m_2 g}{0.5m + m_1 + m_2}}$$

Giờ thay số thì nhẹ nhàng rồi: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg; $m = 1$ kg.

$$a = \frac{2 \times 10 - 1 \times 10}{(0.5 \times 2 + 2 + 1)} = 2.5\ m/s^2$$

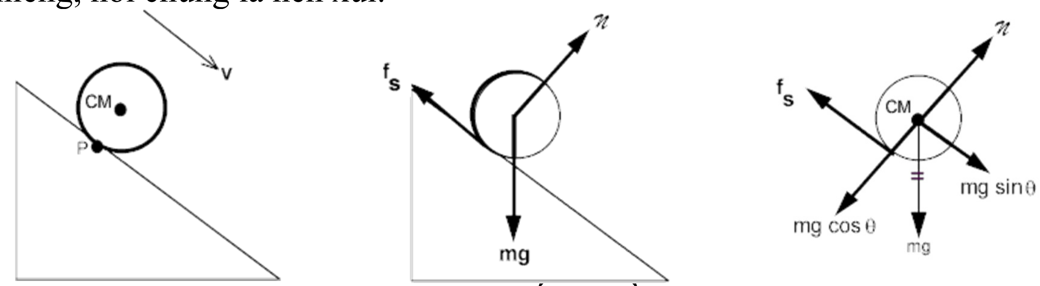
$$T_1 = \frac{(0.5 \times 1 + 2 \times 1) \times 2 \times 10}{0.5 \times 1 + 2 + 1} \approx 14.3\ N$$

$$T_2 = \frac{(0.5 \times 1 + 2 \times 2) \times 1 \times 10}{0.5 \times 1 + 2 + 1} \approx 12.9\ N$$

DẠNG 5: LĂN LÔNG LỐC

5.1. Kiến thức cơ bản:

- Dạng này thường thường xuất hiện khá nhiều trong bài thi, và có đặc điểm nhận dạng cực kì đơn giản là trong hệ sẽ có một vật tham gia chuyển động lăn (thường là trụ, đĩa, cầu). Vật có thể lăn trên mặt nằm ngang hoặc lăn trên mặt phẳng nghiêng, nói chung là hên xui.



- Với các bài dạng này thì quan trọng nhất là điều kiện lăn không trượt phải thỏa mãn để còn áp dụng công thức liên hệ giữa vận tốc dài/gia tốc dài với vận tốc góc và gia tốc góc.

$$v = \omega r \rightarrow a = \beta r$$

- Tiếp theo là phân tích chuyển động, nói chung có hai quan điểm về chuyển động của vật lăn. Quan điểm "gay", tức là coi chuyển động lăn bao gồm chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay → đúng phong cách xăng pha nhớt. Quan điểm "chuẩn men", coi hoàn toàn là chuyển động quay chứ ko có tịnh tiến. Sự khác nhau giữa hai quan điểm này chính là ở trục quay. Đối với quan điểm "gay" thì các "gay" có xu hướng chọn trục quay đi qua khối tâm. Trong khi quan điểm "chuẩn men" thì các "men" thì chọn trục quay tức thời đi qua điểm tiếp xúc giữa vật và mặt phẳng. Chính vì thế nếu ai follow quan điểm chuẩn men thì phải chú ý là trục quay không đi qua khối tâm nên khi tính mômen quán tính phải nhớ dùng công thức Steiner – Huyghen để qui đổi từ mômen quán tính ứng với trục đi qua khối tâm I_{CM} sang mômen quán tính đối với trục quay tức thời:

$$I_{tức\ thời} = I_{CM} + MD^2$$

- Động năng của chuyển động lăn: giờ phân tích tiếp dưới hai quan điểm và tôi sẽ chứng minh là gay hay men thì cũng là người → tuyệt đối ko được phân biệt đối xử đâu đấy ☺.

- Gay: gồm động năng quay và động năng tịnh tiến

$$W = W_{tt} + W_q = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{CM}\omega^2}{2}$$

- Men: gồm mỗi quay

$$W = W_q = \frac{I_{tức\ thời}\omega^2}{2} = \frac{(I_{CM} + MD^2)\omega^2}{2} = \frac{mD^2\omega^2}{2} + \frac{I_{CM}\omega^2}{2}$$

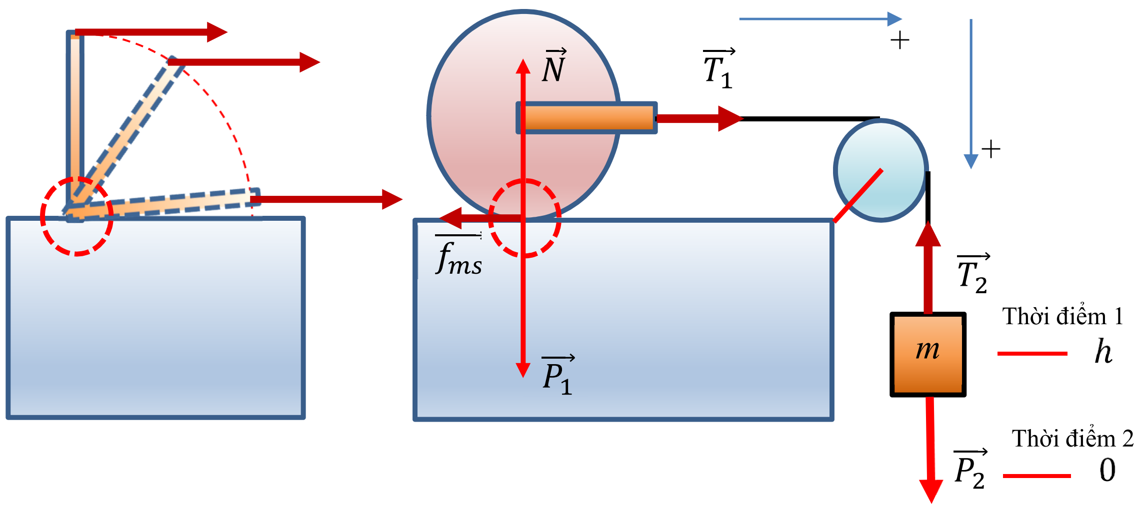
Để ý khoảng cách giữa hai trục chính bằng bán kính của vật lăn nên nếu nhân với gia tốc góc thì nó cũng chính là vận tốc dài.

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{CM}\omega^2}{2}$$

Tóm lại không khác gì nhé, nên thích dùng quan điểm nào cũng ok hết. Tùy theo, thú tính bản thân thôi.

5.2. Bài tập ví dụ

Bài 4-21. Một hệ gồm một trụ đặc đồng chất khối lượng M = 2,54 kg và một vật nặng khối lượng m = 0,5kg được nối với nhau bằng một sợi dây vắt qua ròng rọc (hình vẽ). Bỏ qua khối lượng của dây, của ròng rọc và khung gắn với trụ. Tìm gia tốc của vật nặng và sức căng của dây.



**** Nhận xét:*** Bài này nói chung khá ngon ăn, đa phần hì hục lao vào ăn lấy ăn để vì nó quá rõ ràng. Hệ quan tâm tới 2 thằng là trụ (chuyển động quay) và vật nặng *m* chuyển động tịnh tiến. Nên để ý nữa là chuyển động của thằng trụ có tính chất gay vì nó là chuyển động lăn (đáng ra đề phải cho thêm dữ kiện là lăn không trượt thì mới chuẩn). Chuyển động lăn bao gồm chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay. Do đó, riêng với trụ ta sẽ có 2 pt động lực để mô tả. Đề bài còn cho thêm thông tin trụ đặc đồng chất nhé thế là rõ ràng cmnr, $I_{trụ} = \frac{MR^2}{2}$ cần gì phải tính. Khi trụ lăn ta thấy trụ quay quanh tâm của nó. Lực gây ra mômen lực tại tâm của trụ không phải do 3 thằng $\vec{T_1}$, $\vec{N}$ và $\vec{P_1}$ đâu nhé. Vì ba thằng này đều đi qua tâm của trụ nên mômen lực với tâm quay này là bằng zero rồi. Chỉ có lực ma sát tại vị trí tiếp xúc của trụ với mặt phẳng là đóng vài trò tạo ra mômen lực quanh trục đi qua tâm trụ.

**** Giải:***

- Giờ xét vật m: chuyển động thẳng xuống dưới với gia tốc $\vec{a}$. Chiếu lên trục ta có:

$$\boldsymbol{P_2 - T_2 = ma}$$

- Xét trụ đặc M: vừa tịnh tiến vừa quay:

- Đối với chuyển động tịnh tiến ta có phương trình sau: $\boldsymbol{T_1 - f_{ms} = Ma}$ (dễ thấy là gia tốc tịnh tiến kiểu gì mà chẳng bằng gia tốc của vật m vì hai anh chị này xích mới nhau bằng dây không giãn rồi.
- Đối với chuyển động quay quanh tâm của trụ ta có pt động lực học sau:

$$f_{ms}R = I_{trụ-khối\ tâm}\beta = \frac{MR^2}{2}\beta$$

Để ý lăn không trượt thì ta mới có quan hệ bất chính $a = \beta.R$ → chứ lăn mà trượt thì quên cmnđ. Đây là lí do mà tại sao tôi bảo đề bài cần phải thêm dữ kiện này vào. Thay vào pt động lực học cho chuyển động quay dễ dàng thu được:

$$f_{ms}R = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} \rightarrow \boldsymbol{f_{ms} = \frac{Ma}{2}}$$

Từ ba pt bôi đậm ở trên + chú ý là lực căng $T_1 = T_2 = T$. Ta dễ dàng rút T về một vế rồi tìm các kill thằng T để ra mối quan hệ giữa a và các đại lượng còn lại.

$$T = P_2 - ma = mg - ma$$

$$T = f_{ms} + Ma = \frac{Ma}{2} + Ma = \frac{3Ma}{2}$$

$$\rightarrow mg - ma = \frac{3Ma}{2} \rightarrow \boldsymbol{a = \frac{mg}{m + \frac{3}{2}M}}$$

Cách 2: Để giải bài này theo cách 2, thì chúng ta không coi chuyển động của trụ là chuyển động gay nữa mà qui về chuyển động quay tức thời xung quanh trục đi qua điểm tiếp xúc với trụ. Để hình dung dễ hơn quá trình quay chúng ta có thể thay trụ bằng 1 thanh nào đó và tác động một song song với mặt phẳng nằm ngang. Dễ thấy là thanh sẽ quay một các tức thời quanh điểm tiếp tiếp xúc của thanh với mặt phẳng nằm ngang. Lúc này trục quay không đi qua khối tâm nên phải sử dụng định luật Steiner Huyghen để xác định mômen quán tính của trụ với trục quay tức thời tại điểm tiếp xúc. Khoảng cách giữa hai trục này bằng R rồi nhé → nhìn thì biết thôi. Lực đóng vai trò gây ra chuyển động quay quanh trục tức thời lúc này

sẽ là lực $\overrightarrow{T_1}$ vì ba lực còn lại đều cắt phương của trục rồi nên thuộc dạng yếu sinh lí không cần care làm gì.
- Phương trình động lực học của trụ lúc này sẽ là:

$$TR = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\beta = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\frac{a}{R} \rightarrow \boldsymbol{T = \frac{3Ma}{2}}$$

- Phương trình động lực học của m thì rưa rứa ở trên thôi:

$$T - P_2 = ma \rightarrow T = mg - ma$$

Đến đây thì quá dễ rồi, so sánh hai vế rồi xác định ngay gia tốc a:

$$\boldsymbol{a = \frac{mg}{m + \frac{3}{2}M}}$$

Cách 3: Đã trót thì chơi hẳn 3 cách cho máu, ai thích chơi cách nào thì chọn cách đó cho phù hợp với thú tính của bản thân. Cách 3 sử dụng định luật vô cùng quen thuộc đó là định luật bảo toàn năng lượng. Để áp dụng định luật bảo toàn năng lượng thì chỉ cần bịa ra hai mốc thời điểm 1 và 2 sau đó tính năng lượng của toàn hệ tại hai thời điểm rồi cho nó bằng nhau là xong. Rút gọn biến đổi chút là có thể lên đỉnh một cách dễ dàng. Giả sử thời điểm 1 vật *m* cách mặt đất một đoạn là *h* và bắt đầu chuyển động đi xuống, thời điểm 2 vật *m* chạm đất. Thực ra chọn h_1 và h_2 cũng được, nhưng chả ai hơi đâu chọn thế cho khổ ra, được chọn tùy ý thì cứ hàng ngon nhất mà chén tội zề.
- Tại thời điểm 1: Năng lượng của hệ thực ra nằm ở mỗi thằng m thôi, mặc dù trụ cũng có độ cao so với mốc 0, nhưng vì cả đời thằng trụ chỉ nằm trong mặt phẳng nằm ngang nên thế năng tại hai thời điểm là như nhau thì kiểu gì chả triệt tiêu nhau. Do đó ta tạm coi như ko care đến thế năng của có nó tại cả hai thời điểm:

$$E_1 = mgh$$

- Tại thời điểm 2: Vật m hai tiếp đất an toàn và lúc này thế năng về zero do nó chuyển hết đạn cho động năng rồi. Lúc này năng lượng của hệ gồm động năng của vật m và tất nhiên là gồm cả động năng của cả khối trụ nữa vì nó cũng động đậy chứ có cứng đơ đâu. Động năng của trụ lúc này chú ý là gồm có động năng quay và động năng tịnh tiến đó.

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + I\omega^2$$

Giờ cho E_1 bằng E_2 rồi tìm cách biến đổi rút gọn, miễn làm sao xuất hiện thằng a là ok roài.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \leftrightarrow mg\frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{MR^2}{4}\frac{v^2}{R^2}$$

$$\rightarrow \frac{mg}{a} = m + \frac{3}{2}M \rightarrow \boldsymbol{a = \frac{mg}{m + \frac{3}{2}M}}$$

Ba shot đều ra một kết quả duy nhất là a nên độ tin cậy khá cao. Tất nhiên biết a thì dễ dàng tính nốt ông T ra là xong:

$$\boldsymbol{T = \frac{3Ma}{2} = \frac{3Mmg}{2m + 3M}}$$

DẠNG 5: STEINER – HUYGHEN

5.1. Kiến thức cơ bản:

- Dạng này nhìn tên thì biết cần phải thuộc định lý nào rồi.

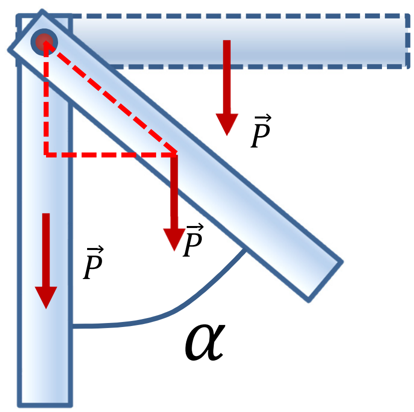
$$I_z = I_{CM} + MD^2$$

- Nói chung dạng này khá là dễ vì thường nhìn đề là biết ngay. Trục quay trong bài thường không cho đi qua khối tâm. Do đó khi làm bài này, trong đầu cần vạch ra hai quest quan trọng nhất:

- Quest 1: Xác định khoảng cách giữa hai trục
- Quest 2: Xác định hình dạng vật → tính mômen quán tính ứng với trục quay đi qua khối tâm.

5.2. Bài tập ví dụ

Bài 4-23: Một thanh có chiều dài *l* = 1m quay xung quanh một trục nằm ngang đi qua một đầu của thanh. Lúc đầu, thanh ở vị trí nằm ngang, sau đó được thả ra (hình vẽ). Tìm gia tốc góc của thanh lúc bắt đầu thả rơi và lúc thanh đi qua vị trí thẳng đứng.



**** Nhận xét:*** Trục quay đi qua một đầu của thanh, tức là không đi qua khối tâm rồi → Steiner – Huyghen 100% roài. Bài toán hỏi gia tốc góc lúc thanh bắt đầu thả rơi và lúc thanh đi qua vị trí thẳng đứng. Tư duy theo kiểu con bò thì ta thấy $\beta = \frac{M}{I}$ nên chỉ cần xác định mômen quán tính *I* (theo SH nhé) và mômen lực ứng với hai trường hợp là xong. Mômen lực thì chỉ cần xác định độ lớn của lực và khoảng cách của lực tới phương đó là xong. Phân tích hình vẽ ta thấy khi quay từ vị trí nằm ngang về vị trí thẳng đứng thì rõ ràng là khoảng cách từ trục quay giảm dần đến giá trị 0. Như vậy chả cần tính cũng biết ngay là tại vị trí thẳng đứng làm gì còn mômen lực đâu nên gia tốc góc bằng 0 cmnl. Chú ý là ko care đến mấy phản lực ở trục quay nhé vì nó không đóng góp gì cho chuyển động quay ngoài việc giữ một đầu của thanh. Giờ bài toán chỉ đơn giản là tính mômen lực gây bởi trọng lực P khi thanh nằm ngang.

**** Giải:***

- Mômen lực gây bởi trọng lực của thanh khi nó nằm ngang là:

$$M = P.\frac{l}{2} = \frac{mgl}{2}$$

- Tiếp theo xác định nốt mômen quán tính của thanh theo định luật ét hát là xong:

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

- Giờ thì thịt em hot girl β quá dễ dàng roài:

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mgl}{2}\frac{3}{ml^2} = \frac{3g}{2l} = \frac{3 \times 10}{2 \times 1} = 15\, rad/s^2$$

BONUS: tất nhiên hai trường hợp trên thì quá đặc biệt rồi. Tuy nhiên, tốt nhất là nên xây dựng công thức tổng quát để rơi vào bài nó hỏi một góc bất kì thì còn biết mà chém không thì biết đường nào mà tính. Giả sử xét thanh tại vị trí tạo với phương thẳng đứng một góc α nào đó (ai thích thì chọn nằm ngang cũng chả sao). Khi đó thì công thức xác định mômen lực sẽ là:

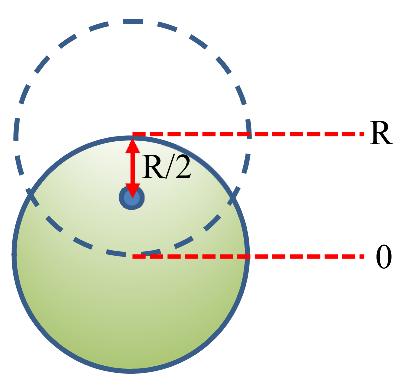
$$M = P.\frac{l}{2}sin\alpha = \frac{mglsin\alpha}{2}$$

Giờ thay vào mà tính nốt bêta thôi:

$$\boldsymbol{\beta = \frac{M}{I} = \frac{mglsin\alpha}{2}\frac{3}{ml^2} = \frac{3gsin\alpha}{2l}}$$

Công thức này hay đấy nên cố mà nhớ để làm trắc nghiệm cho nhanh. Có thể nhớ bằng cách ghép cho nó một câu nào đó thật bựa như ***"Bỏ gấu sin ăn chơi LOL"***

Bài 4-24: Một đĩa tròn đồng chất bán kính R_1 khối lượng m có thể quay xung quanh 1 trục nằm ngang vuông góc với đĩa và cách tâm đĩa một đoạn R/2. Đĩa bắt đầu quay từ vị trí tương ứng với vị trí cao nhất của tâm đĩa với vận tốc đầu bằng 0. Xác định mômen động lượng của đĩa đối với trục quay khi đĩa đi qua vị trí thấp nhất.



**** Nhận xét:*** Bài toán yêu cầu xác định mômen động lượng, mà nhắc tới mômen động lượng thì phải nhớ ngay tới mômen quán tính và ômega (ko phải ozawa đâu đấy). Mômen quán tính thì nhìn là biết lại phải summon anh ét hát roài. Còn ômega, để xem nào. Thông thường khi bài toán bắt tính vận tốc thì ta có thể thử sử dụng định luật bảo toàn năng lượng xem vì thông tin về vận tốc nằm ở trong động năng chứ còn nằm đâu.

**** Giải:***

Để ý thấy tại vị trí cao nhất và vị trí thấp nhất khoảng cách giữa hai khối tâm là R → chọn mốc 0 của thế năng là vị trí thấp nhất cho tiện. Như vậy ở vị trí cao nhất năng lượng của đĩa tròn dưới dạng thế năng và có dạng:

$$W_t = mgR$$

Tại vị trí thấp nhất năng lượng của đĩa có dạng động năng (thế năng bằng 0 nhé) và có dạng:

$$W_đ = \frac{I\omega^2}{2}$$

Định luật bảo toàn năng lượng thôi các thím:

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgR$$

Để ý là $L = I\omega$ nên ta biến đổi chút xíu:

$$\frac{I^2\omega^2}{2I} = mgR \leftrightarrow \frac{L^2}{2I} = mgR \rightarrow L = \sqrt{2mgRI}$$

Giờ xác định nốt ông I là giải tán → theo SH ta có:

$$I = \frac{mR^2}{2} + m\frac{R^2}{4} = \frac{3mR^2}{4}$$

Thay vào phương trình trên là xác định được ngay mômen động lượng khi đĩa ở vị trí thấp nhất:

$$\boldsymbol{L = \sqrt{2mgR\frac{3mR^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}m^2gR^3} = mR\sqrt{\frac{3}{2}gR}}$$