HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ĐỊNH HƯỚNG TUẦN 8 - 9

DẠNG 1: BÀI TOÁN DE BROGLIE

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

- Hạt vi mô có năng lượng xác định E, động lượng xác định $\vec{p}$ tương ứng với một sóng phẳng đơn sắc có tần số dao động *f* có bước sóng λ (hay có vector sóng $\vec{k}$ với $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

$$E = hf = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda};\ \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Trong đó $\hbar$ là hằng số Plank thu gọn: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

- Vận tốc pha: $v_F = \frac{\omega}{k}$

- Một số công thức cần quan tâm:

$$eU = W_đ = \frac{p^2}{2m}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{m_e v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{hc}{\sqrt{eU(eU+2m_e c^2)}} = \frac{hc}{\sqrt{W_đ(W_đ+2m_e c^2)}}\ \textbf{(tương đối tính)}$$

2. BÀI TẬP MINH HỌA:

BÀI 5.1. Tìm bước sóng de Broglie của electron và proton chuyển động với vận tốc $10^6 m/s$	
Tóm tắt: $v = 10^6 m/s$ $m_e = 9,1.10^{-31} kg$ $m_p = 1,6726.10^{-27} kg$ Xác định λ_e, λ_p	

* Nhận xét: Đây là bài toán de Broglie, thể hiện tính chất sóng hạt của hạt vi mô. Electron và proton là hai hạt vi mô tương ứng với sóng phẳng đơn sắc có tần số dao động *f* có bước sóng λ.

- Theo công thức de Broglie ta có: $p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

- Thay khối lượng electron và khối lượng proton vào ta có bước sóng de Broglie của electron và proton:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v} = 7{,}28.10^{-10} m$$

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v} = 3{,}96.10^{-13} m$$

→ khối lượng hạt vi mô càng lớn thì bước sóng tương ứng cảng giảm.

<table>
<tr><td colspan="2">BÀI 5.2. Hạt electron tương đối tính chuyển động với vận tốc 2.10⁸m/s. Tính bước sóng de Broglie của nó.</td></tr>
<tr><td>Tóm tắt:
$v = 10^6 m/s$
$m_e = 9{,}1.10^{-31} kg$
Xác định λ_e</td><td></td></tr>
</table>

* Nhận xét: Bài toán này tương tự bài toán 5.1 → áp dụng công thức tính bước sóng ta có thể xác định bước sóng de Broglie của electron.

- Bước sóng tương đối tính:

$$\boldsymbol{\lambda_e = \frac{h}{m_e v} = 7{,}28.10^{-10} m}$$

<table>
<tr><td colspan="2">BÀI 5.3. Hạt electron không vận tốc đầu được gia tốc qua một hiệu điện thế U. Tính U biết rằng sau khi gia tốc, hạt electron chuyển động ứng với bước sóng de Broglie 1Å</td></tr>
<tr><td>Tóm tắt:
$\lambda_e = 1$Å
$m_e = 9{,}1.10^{-31} kg$
Xác định U</td><td></td></tr>
</table>

* Nhận xét: Phương hướng của bài toán: bước sóng → xác định động lượng → xác định động năng → xác định hiệu điện thế U

- Động lượng của electron là:

$$p = \frac{h}{\lambda_e}$$

- Động năng của electron là:

$$W_đ = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_e^2}$$

- Hiệu điện thế gia tốc là:

$$eU = W_đ \rightarrow \boldsymbol{U = \frac{W_đ}{e} = \frac{h^2}{2.e.m_e\lambda_e^2} = 150,7V}$$

BÀI 5.4. Xác định bước sóng de Broglie của hạt electron có động năng bằng 1*keV*	
Tóm tắt: $W_đ$ = 1*keV* $m_e = 9,1.10^{-31}kg$ Xác định λ	

* Nhận xét: Muốn xác định được bước sóng de Broglie ta phải đi xác định động lượng của electron mà đề cho động năng đã biết → từ mối quan hệ giữa động lượng và động năng ta hoàn toàn có thể xác định được động lượng của electron. Chú ý là phải đổi đơn vị *keV* ra đơn vị *J* **(1*eV* = $1,6.10^{-19}$*J*)**

- Động lượng của electron là:

$$p = \sqrt{2m_eW_đ}$$

- Bước sóng de Broglie của hạt electron là:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_eW_đ}} = 3,88.10^{-11}m$$

BÀI 5.5. Xác định bước sóng de Broglie của hạt proton được gia tốc (không vận tốc ban đầu) qua một hiệu điện thế bằng 1*kV* và 1*MV*	
Tóm tắt: U_1 = 1*kV* U_2 = 1*MV* $m_p = 1,6726.10^{-27}kg$ Xác định λ	

* Nhận xét: Hướng giải của bài này là: hiệu điện thế → xác định động năng → xác định động lượng → xác định bước sóng.

- Động năng của hạt proton là:

$$eU = W_đ$$

- Động lượng của proton là:

$$p = \sqrt{2m_pW_đ} = \sqrt{2m_peU}$$

- Bước sóng de Broglie của hạt proton được gia tốc là:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_peU}}}$$

- Lần lượt thay các giá trị vào ta có: $\lambda_1 = 9{,}05.10^{-13}m$, $\lambda_2 = 2{,}86.10^{-14}m$

BÀI 5.6. Hỏi phải cung cấp cho hạt electron thêm một năng lượng bằng bao nhiêu để cho bước sóng de Broglie của nó giảm từ $100.10^{-12}m$ đến $50.10^{-12}m$?	
Tóm tắt: $\lambda_1 = 100.10^{-12}m$ $\lambda_2 = 50.10^{-12}m$ $m_e = 9{,}1.10^{-31}kg$ Xác định E	

* Nhận xét: Đối với bài toán này ta cần phải sử dụng mối liên hệ giữa năng lượng cung cấp và bước sóng de Broglie: (ở đây ta xét trường hợp phi tương đối tính)

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_eE}}}$$

→ dễ thấy năng lượng càng tăng thi bước sóng sẽ càng giảm → xét riêng cho từng trường hợp ta dễ dàng suy ra phần năng lượng cần cung cấp thêm.

- Đối với bước sóng λ_1:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_1}}}$$

- Đối với bước sóng λ_2:

$$\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_2}}}$$

$\rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = 4 \rightarrow \frac{\Delta E}{E_1} = 3 \rightarrow \boldsymbol{\Delta E = 3E_1 = 3\frac{h^2}{2m_e\lambda_1^2} = 452eV}$

BÀI 5.9. Thiết lập biểu thức của bước sóng de Broglie λ của hạt tương đối tính chuyển động với động năng $W_đ$. Với giá trị nào của $W_đ$, sự sai khác giữa λ tương đối tính và λ phi tương đối tính không quá 1% đối với hạt electron và hạt proton.	
Tóm tắt: $\lambda_1 = 100.10^{-12}m$ $\lambda_2 = 50.10^{-12}m$ $m_e = 9{,}1.10^{-31}kg$ $m_p = 1{,}672.10^{-27}kg$ Xác định E	

* Nhận xét: Ở đây ta cần hiểu khái niệm tương đối tính và phi tương đối tính.

- Tương đối tính: xét trong trường hợp vận tốc của electron không quá lớn → có thể sử dụng các công thức trong cơ học phi tương đối (cơ học Newton).

- Phi tương đối tính: xét trong trường hợp vận tốc của electron lớn → áp dụng cơ học tương đối tính của Einstein.

Ranh giới giữa cơ học tương đối tính và phi tương đối tính có thể coi là trường hợp năng lượng nghỉ của electron bằng động năng của electron (= 0,51*MeV*).

- Xét trường hợp tương đối tính: ta có mối quan hệ giữa bước sóng và động năng của hạt

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{m_e v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{hc}{\sqrt{eU(eU+2m_ec^2)}} = \frac{hc}{\sqrt{W_đ(W_đ+2m_ec^2)}}}$$

- Xét trường hợp phi tương đối tính:

$$\boldsymbol{\lambda_0 = \frac{h}{m_e v}}$$

- Như vậy ta có:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Mặt khác: $W_đ = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$ nên ta có:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{W_đ}{m_e c^2} \rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{W_đ}{m_e c^2} \rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{W_đ}{m_e c^2}$$

- Theo đề bài: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{100}$ nên $\boldsymbol{\frac{W_đ}{m_e c^2} \leq \frac{1}{100}}$

- Đối với electron: $W_đ \leq 5{,}1 keV$
- Đối với proton: $W_đ \leq 9{,}4 keV$

DẠNG 2: HỆ THỨC BẤT ĐỊNH HEISENBERG

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

- Hệ thức giữa độ bất định về tọa độ và độ bất định về động lượng vi hạt:

$$\Delta x.\Delta p_x \gtrsim \hbar$$

- Hệ thức giữa độ bất định về năng lượng và thời gian sống của vi hạt:

$$\Delta E.\Delta t \gtrsim \hbar$$

2. BÀI TẬP MINH HỌA:

BÀI 5.10. Tính độ bất định về tọa độ Δ*x* của hạt electron trong nguyên tử H biết rằng vận tốc electron bằng $v = 1{,}5.10^6 m/s$ và độ bất định về vận tốc Δ*v* = 10% của *v*. So sánh kết quả tìm được với đường kính *d* của quỹ đạo Bo thứ nhất và xem xét có thể áp dụng khái niệm quỹ đạo cho trường hợp trên được không.	
Tóm tắt: $v = 1{,}5.10^6 m/s$ $\Delta v = 10\%$ $d = 2r_0$ $r_0 = 0{,}53.10^{-10} m$ Xác định Δ*x*	

* Nhận xét: Đây là bài toán bất định Heisenberg, dựa vào hệ thức giữa độ bất định của tọa độ và động lượng ta có thể xác định được độ bất định về tọa độ Δx. Nếu độ bất định mà lớn hơn đường kính quỹ đạo Bo thứ nhất thì ta không thể áp dụng được khái niệm quỹ đạo cho trường hợp này. (giống như trường hợp tín hiệu nhiễu lại lớn hơn tín hiệu cần đo → không thể xác định được tín hiệu đo).

- Độ bất định về tọa độ Δx của hạt electron trong nguyên tử Hidro là:

$$\Delta x=\frac{\hbar}{\Delta p_x}=\frac{\hbar}{m_e\Delta v}=7{,}7.10^{-9}m$$

- Đường kính của quỹ đạo Bo thứ nhất là:

$$d=2r_0=2.0{,}53.10^{-10}=10{,}6.10^{-11}m$$

Như vậy ta thấy $\Delta x > d$ → không thể áp dụng khái niệm quỹ đạo trong trường hợp kể trên.

BÀI 5.11. Hạt electron có động năng $W_đ = 15eV$ chuyển động trong một giọt kim loại kích thước $d = 10^{-6}m$. Tính độ bất định về vận tốc (ra %) của hạt đó.	
Tóm tắt: $W_đ = 15eV$ $d = 10^{-6}m$ Xác định $\Delta v/v$	

* Nhận xét: Hệ thức bất định liên hệ giữa tọa độ và động lượng → đề bài cho động năng → chú ý mối quan hệ giữa động lượng và động năng.

- Độ bất định về vận tốc của hạt electron là:

$$\Delta v=\frac{\hbar}{m_e\Delta x}=\frac{2\hbar}{m_e d}$$

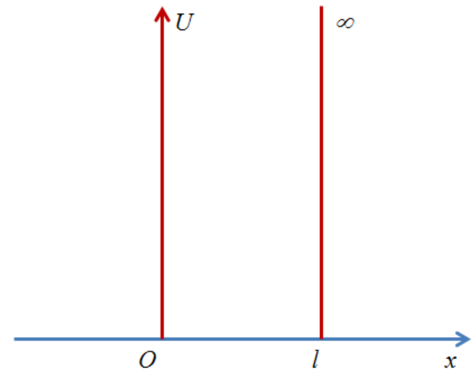
Trong đó $\Delta x=\frac{d}{2}$

- Độ bất định về vận tốc theo % là:

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{2\hbar}{m_e v d}=\frac{2\hbar}{pd}=\frac{2\hbar}{\sqrt{2m_eW_đ}d}=0{,}01\%$$

BÀI 5.14. Dùng hệ thức bất định, hãy đánh giá năng lượng nhỏ nhất E_{min} của electron.

a. Chuyển động trong giếng thế năng một chiều bề rộng bằng *l*
b. Chuyển động trong nguyên tử Hidro có kích thước *l* = 1Å.

Tóm tắt: - Giếng thế năng một chiều bề rộng bằng *l* - nguyên tử Hidro có kích thước *l* = 1Å Xác định E_{min}	 *Mô hình giếng thế một chiều*

* Nhận xét: Ở đây ta cần tìm hiểu một giếng thế năng một chiều. Chúng ta hãy tưởng tưởng chúng ta đang ở đáy của một cái giếng có đô sâu vô hạn. Rõ ràng là chúng ta chỉ có thể di chuyển trong giếng chứ không thể nào di chuyển ra ngoài được vì thành giếng quá cao (ứng với một thế năng vô hạn). Như vậy ta thấy có hai khu vực ứng với thế năng bằng 0 (lòng giếng) và thế năng vô hạn (ngoài giếng).

$$U = \begin{cases} 0\ khi\ 0 < x < l \\ \infty\ khi\ x \leq 0, x \geq a \end{cases}$$

- Từ hệ thức bất định ta có:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \rightarrow \Delta v \geq \frac{\hbar}{m_e \Delta x} = \frac{2\hbar}{m_e l}$$

Dễ thấy $v_{min} = \Delta v_{min} = \frac{2\hbar}{m_e l}$ → năng lượng cực tiểu là:

$$\boldsymbol{E_{min} = \frac{1}{2} m_e v_{min}^2 = \frac{2\hbar^2}{m_e l^2}}$$

Trong trường hợp nguyên tử Hidro, thay *l* = 1Å ta có:

$$\boldsymbol{E_{min} = 602,8eV}$$

BÀI 5.16. Hạt vi mô khối lượng m chuyển động trong trường thế một chiều $U = \frac{1}{2}kx^2$ (dao tử điều hòa). Dùng hệ thức bất định, xác định giá trị nhỏ nhất khả dĩ của năng lượng.	
Tóm tắt: - Giếng thế năng một chiều	

- $U = \frac{1}{2}kx^2$ Xác định E_{min}	

* Nhận xét: Đây là bài toán ứng dụng hệ thức bất định để giải. Do đề bài cho biết thế năng và bắt xác định năng lượng nên ta phải sử dụng hệ thức bất định:

$$\Delta x \Delta p \backsimeq \hbar$$

Ta lại có $\Delta p \leq p$ → xét trong trường hợp giới hạn ta có thể coi

$$p \backsimeq \Delta p \backsimeq \frac{\hbar}{\Delta x} \backsimeq \frac{\hbar}{x}$$

Mặt khác năng lượng của dao tử điều hòa bằng tổng động năng và thế năng nên ta có:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \backsimeq \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{1}{2}kx^2$$

Áp dụng điều kiện cực tiểu E là $\frac{dE}{dx} = 0$, ta có:

$$-\frac{\hbar^2}{mx_0^3} + kx_0 = 0 \rightarrow x_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}$$

Thay vào ta có: $E_{min} = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar\omega$

BÀI 5.19. Dùng hệ thức bất định $\Delta E.\Delta t \gtrsim \hbar$ xác định độ rộng của mức năng lượng electron trong nguyên tử hidro ở trạng thái: a. Cơ bản b. Kích thích ứng với thời gian sống $\tau \approx 10^{-8}$s	
Tóm tắt: $\Delta E.\Delta t \gtrsim \hbar$ Trạng thái cơ bản Trạng thái kích thích: $\tau \approx 10^{-8}s$ Xác định độ rộng mức năng lượng	

* Nhận xét: Trạng thái cơ bản ứng với thời gian sống $\Delta t = \tau = \infty$ → áp dụng hệ thức bất định ta dễ dàng tìm được độ rộng mức năng lượng của electron trong nguyên tử hidro.

- Ở trạng thái cơ bản:

$$\Delta E.\Delta t \gtrsim \hbar \rightarrow \Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar}{\tau} = 0$$

- Ở trạng thái kích thích:

$$\Delta E \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar}{\tau} \approx 10^{-7} eV$$

DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH SCHRODINGER

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

- Phương trình Schrodinger tổng quát đối với một vi hạt:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)\psi$$

- Nếu hàm thế năng U chỉ phụ thuộc vào $\vec{r}$, hàm sóng ψ có dạng hàm sóng ở trạng thái dừng: $\psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\vec{r})$ → ta có pt Schrodinger đối với trạng thái dừng:

$$E\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r})\right)\psi$$

Hay $\boldsymbol{\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0}$

Trong đó toán tử $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- Điều kiện của hàm sóng: đơn trị, liên tục, và dẫn tới 0 khi $r \rightarrow \infty$

- Phương trình Schrodinger ở trạng thái dừng là phương trình vi phân bậc 2 thuần nhất → ta cần nắm được phương pháp giải phương trình vi phân bậc 2 thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

trong đó p, q là 2 hằng số. Để giải phương trình trên ta thực hiện các bước sau:

- Giải phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$ (2)
- Căn cứ vào số nghiệm để kết luận nghiệm:
  - Có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 → nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

- Có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$ → nghiệm tổng quát:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$$

- Có nghiệm phức: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ → nghiệm tổng quát:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$$

- Chú ý:

- Đối với phương trình Schrodinger thì $p = 0$ → phương trình sẽ có hai nghiệm $k_{1,2} = \pm \beta i$ → nghiệm tổng quát của phương trình Schrodinger là:

$$\boldsymbol{\psi(x) = C_1e^{i\beta x} + C_2e^{-i\beta x}}$$

- Điều kiện liên tục của hàm sóng và đạo hàm cấp 1 của hàm sóng tại một điểm x_0:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi_I(x_0) = \psi_{II}(x_0)} \\ \boldsymbol{\dfrac{d\psi_I(x_0)}{dx} = \dfrac{d\psi_{II}(x_0)}{dx}} \end{cases}$$

2. BÀI TẬP MINH HỌA:

BÀI 5.21. Viết phương trình Schrodinger đối với hạt vi mô:

a. Chuyển động trong trường thế $U = \frac{1}{2}kx^2$
b. Chuyển động trong trường tĩnh điện Coulomb: $U = -k_0\frac{Ze^2}{r}$ với $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
c. Chuyển động trong không gian hai chiều dưới tác dụng của trường thế $U = \frac{1}{2}kr^2$

Tóm tắt: $U = \dfrac{1}{2}kx^2$ $U = -k_0\frac{Ze^2}{r}$ với $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $U = \dfrac{1}{2}kr^2$ Viết pt Schrodinger	

*** Nhận xét:** Đây là bài toán cơ bản về lập phương trình Schrodinger của hạt vi mô chuyển động trong trường thế năng U → sử dụng pt Schrodinger tổng quát:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

Tùy vào không gian khảo sát (một chiều hay đa chiều) mà ta sử dụng pt tương ứng.

- Đối với hạt chuyển động trong trường thế $U = \frac{1}{2}kx^2$, ta có phương trình:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

- Đối với hạt chuyển động trong trường tĩnh điện Coulomb: $U = -k_0\frac{Ze^2}{r}$ với $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ta có phương trình

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + k_0\frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0$$

- Đối với hạt chuyển động trong không gian hai chiều dưới tác dụng của trường thế $U = \frac{1}{2}kr^2$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right)\psi$$

BÀI 5.21. Dòng hạt chuyển động từ trái sang phải qua một hàng rào bậc thang:

$$U = \begin{cases} 0 \; khi \; x \le 0 \\ U_0 \; khi \; x > 0 \end{cases}$$

Giả sử năng lượng của hạt bằng $E > U_0$, biết hàm sóng hạt tới cho bởi:

$\psi_S = e^{ikx}$ trong đó $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

a. Viết biểu thức hàm sóng phản xạ và hàm sóng truyền qua.
b. Tính bước sóng de Broglie của hạt ở miền I ($x \le 0$) và II ($x > 0$). Tính tỷ số $n = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}}$ (chiết suất của sóng de Broglie)
c. Tìm mối liên hệ giữa hệ số phản xạ R và chiết suất n

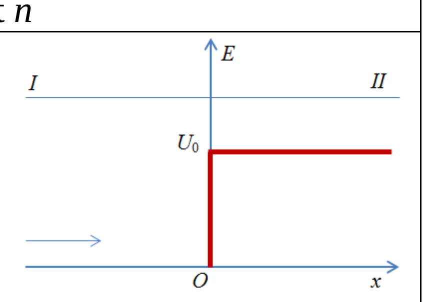
Tóm tắt:

$$U = \begin{cases} 0 \; khi \; x \le 0 \\ U_0 \; khi \; x > 0 \end{cases}$$

Sóng tới: $\psi_S = e^{ikx}$ trong đó $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Viết biểu thức hàm sóng phản xạ, sóng truyền qua

Tính λ_I, λ_{II}



Tìm mối liên hệ giữa hệ số phản xạ R và chiết suất n	

Nhận xét: Hàm thế năng U có hai giá trị khác nhau nên ta chia thành hai miền I và II. Mỗi miền hàm sóng $\psi(x)$ của hạt sẽ khác nhau. Để giải quyết câu a, ta sẽ giải phương trình Schrodinger trong từng miền I và II để xác định hàm sóng cần tìm.

- Trong miền I, hàm sóng $\psi_I(x)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_I = 0$$

- Đặt $\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2$ → Phương trình đặc trưng sẽ có hai nghiệm $\pm ki$ → nghiệm tổng quát của phương trình trên là:
  $$\psi_I(x) = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx} \text{ (*)}$$
- Chú ý:
  - Số hạng C_1e^{ikx}: sóng tới (truyền từ phải sang trái), C_2e^{-ikx}: sóng phản xạ (truyền từ trái sang phải)
  - Ý nghĩa của hệ số biên độ sóng C_1 và C_2: $|C_1|^2$ – mật độ dòng hạt tới, $|C_2|^2$ – mật độ dòng hạt phản xạ → từ đây ta đưa ra khái niệm hệ số phản xạ:
    $$R = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}$$
    Mà đã có hệ số phản xạ thì chắc chắn sẽ phải có hệ số truyền qua.
    $$D = 1 - R$$
- Quay lại với bài toán, đề bài đã cho biết hàm sóng tới có dạng $\psi_S = e^{ikx}$ → kết hợp với nghiệm tổng quát của phương trình ta có: $C_1 = 1$ → nghiệm tổng quát lúc này sẽ có dạng:
  $$\psi_I(x) = e^{ikx} + C_2e^{-ikx}$$

- Trong miền II, hàm sóng $\psi_{II}(x)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2\psi_{II}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_{II} = 0$$

- Đặt $\frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0) = k_1^2$ → phương trình đặc trưng có hai nghiệm $\pm k_1 i$ → nghiệm tổng quát của phương trình trên là:
  $$\psi_{II}(x) = C_3e^{ik_1x} + C_4e^{-ik_1x} \text{ (**)}$$

- Nhận xét: vì trong miền II không có sóng phản xạ nên $C_4 = 0$ → nghiệm tổng quát của phương trình sẽ có dạng:

$$\psi_{II}(x) = \boldsymbol{C_3 e^{ik_1 x}}$$

→ Để lập được phương trình sóng phản xạ và sóng truyền qua ta phải xác định hệ số C_2 và C_3 → sử dụng điều kiện liên tục của hàm sóng và của đạo hàm cấp 1.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi_I(0) = \psi_{II}(0)} & \boldsymbol{(1)} \\ \boldsymbol{\dfrac{d\psi_I(0)}{dx} = \dfrac{d\psi_{II}(0)}{dx}} & \boldsymbol{(2)} \end{cases}$$

- Từ phương trình (1) ta có: $1 + C_2 = C_3$

- Từ phương trình (2) ta có: $k(1 - C_2) = k_1 C_3$

→ giải hệ phương trình ta có: $C_2 = \frac{k-k_1}{k+k_1}; C_3 = \frac{2k}{k+k_1}$

- Hàm sóng phản xạ là:

$$\boldsymbol{\psi_R = \frac{k - k_1}{k + k_1} e^{-ikx}}$$

$$\boldsymbol{\psi_D = \frac{k - k_1}{k + k_1} e^{ik_1 x}}$$

**** Nhận xét:*** Đối với câu b ta chỉ cần áp dụng công thức tính bước sóng de Broglie cho miền I, miền II ứng với vector sóng k và k_1. Đối với câu c, ta chỉ cần áp dụng công thức tính hệ số phản xạ: $R = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}$

- Trong miền 1: $\boldsymbol{\lambda_I = \frac{2\pi}{k}}$
- Trong miền II: $\boldsymbol{\lambda_{II} = \frac{2\pi}{k_1}}$
- Chiết suất của sóng de Broglie là: $\boldsymbol{n = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} = \frac{k_1}{k} = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}$
- Hệ số phản xạ: $\boldsymbol{R = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} = \left(\frac{k-k_1}{k+k_1}\right)^2}$ → chia cả tử và mẫu cho k^2 ta sẽ thu được mối liên hệ giữa R và n.

$$\boldsymbol{R = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2}$$

BÀI 5.25. Khảo sát sự truyền của dòng hạt từ trái sang phải qua hàng rào thế bậc thang

$$U = \begin{cases} 0 \; khi \; x \leq 0 \\ U_0 \; khi \; x > 0 \end{cases}$$

Giả sử năng lượng của hạt bằng $E < U_0$.

a. Tìm hàm sóng của hạt ở miền I ($x \leq 0$), và ở miền II ($x > 0$)
b. Tính hệ số phản xạ và hệ số truyền qua.

Giải thích kết quả tìm được.

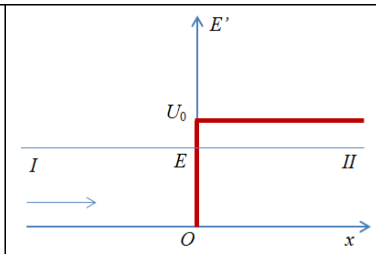
Tóm tắt:

$$U = \begin{cases} 0 \; khi \; x \leq 0 \\ U_0 \; khi \; x > 0 \end{cases}$$

$E < U_0$

Tìm ψ_I, ψ_{II}

Tìm R, D



* Nhận xét: Bài toán này tương tự như bài toán trên, chỉ khác ở chỗ trong miền 2 khi $E < U_0$ thì phương trình đặc trưng sẽ có hai nghiệm thực $\pm k_1$.

- Trong miền I ($x \leq 0$): $U = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_I = 0$$

- Đặt $\frac{2m}{\hbar^2} = k^2$ → nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$\psi_I = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

- Trong miền II ($x > 0$): $U = U_0$

$$\frac{\partial^2 \psi_{II}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_{II} = 0$$

- Đặt $\frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0) = k_1^2$ → nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$\psi_{II} = C_3 e^{k_1 x} + C_4 e^{-k_1 x}$$

Vì trong miền II hàm sóng giới nội nên $C_3 = 0$ (chúng ta hãy tưởng tượng nếu chúng ta không đủ sức nhảy qua một bức tường thì khi chạy lại gặp bức tường cao hơn sức bật của chúng ta → tất nhiên là sẽ bị bật trở lại → không có sóng truyền qua → $C_3 = 0$).

- Xét điều kiện liên tục của hàm sóng và hàm bậc nhất để xác định các hệ số C_1, C_2, C_4:

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) & (1) \\ \dfrac{d\psi_I(0)}{dx} = \dfrac{d\psi_{II}(0)}{dx} & (2) \end{cases}$$

- Từ phương trình (1) ta có: $C_1 + C_2 = C_4$
- Từ phương trình (2) ta có: $ik(C_1 - C_2) = -C_4k_1$

  → $\frac{C_1+C_2}{C_1-C_2} = \frac{k}{ik_1} \to \frac{C_2}{C_1} = \frac{k-ik_1}{k+ik_1} \to C_2 = \frac{k-ik_1}{k+ik_1}C_1 \to C_4 = \frac{2k}{k+ik_1}$

- Ta có phương trình hàm sóng trong miền *I*, *II* có dạng:

- Miền *I*: $\psi_I = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx} = C_1\left(e^{ikx} + \frac{k-ik_1}{k+ik_1}e^{-ikx}\right)$
- Miền *II*: $\psi_{II} = C_4e^{-k_1x} = \frac{2k}{k+ik_1}e^{-k_1x}$

- Hệ số phản xạ: $R = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} = \frac{|k-ik_1|^2}{|k+ik_1|^2} = \frac{k^2+k_1^2}{k^2+k_2^2} = 1$

- Hệ số truyền qua: $D = 1 - R = 0$

- Nhận xét:

- Hàm sóng trong miền II vẫn khác 0, có mật độ xác suất tồn tại là:

$$|\psi_{II}|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + k_1^2}e^{-2k_1x}$$

  → Đây là sự khác nhau giữa cơ học cổ điển và cơ học lượng tử. Theo cơ học cô điển trong miền $x > 0$ tại đó $E < U_0$ thì hạt không thể xuyên vào được. Nhưng đối với cơ học lượng tử, xác suất tìm thấy hạt trong miền x > 0 với $E < U_0$ vẫn khác không → hạt có thể xuyên vào vùng này (mặc dù hàm sóng sẽ bị triệt tiêu rất nhanh theo khoảng cách) → hiệu ứng đường ngầm

  - Từ công thức mật độ xác suất tồn tại ta thấy xác suất tồn tại tỷ lệ với e^{-2k_1x}. Gọi Δx là độ xuyên sâu của hạt trong miền *II* ta thấy Δx tỷ lệ với $\frac{1}{2k_1}$ → giá trị tới hạn của Δx là $\frac{1}{2k_1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}}$